

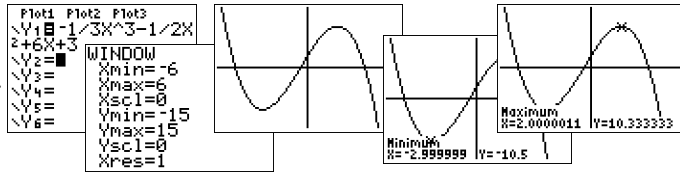
1a Maak een schets van de plot hiernaast.

1b Minimum (minimum) $\Rightarrow x = -3$ en $y = -10\frac{1}{2}$.

Maximum (maximum) $\Rightarrow x = 2$ en $y = 10\frac{1}{3}$.

Dalend op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$ en $\langle 2, \rightarrow \rangle$.

Stijgend op $\langle -3, 2 \rangle$; toenemend stijgend op $\langle -3, -\frac{1}{2} \rangle$ en afnemend stijgend op $\langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle$.

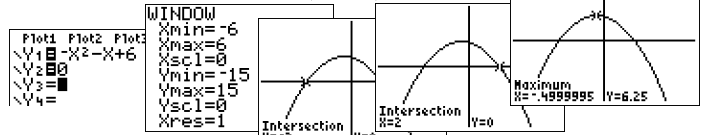


1c $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 3 \Rightarrow f'(x) = -x^2 - x + 6$.

Maak een schets van de grafiek hiernaast.

1d $x_p = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$.

1e Bij $x = x_p$ gaat de grafiek over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.



2a Zie de figuur hiernaast.

2b Raken aan de bovenkant (raaklijnen rusten op de grafiek) voor $x < 3$.

2c De overgang (van rusten op naar hangen onder) vindt plaats in $(3, -1\frac{1}{2})$.

2d onderkant. bovenkant.

☐

3 Bij $(-1, \ln(\sqrt{2}))$ ($x = -1$) gaat de grafiek van het voorbeeld op blz. 38 over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

Bij $(1, \ln(\sqrt{2}))$ ($x = 1$) gaat de grafiek van het voorbeeld op blz. 38 over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

4a $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 \Rightarrow f''(x) = -x^2 - 2x$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(-x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$.

$f(0) = -\frac{1}{12} \cdot 0^4 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = 0$ en

$f(-2) = -\frac{1}{12} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 = -\frac{16}{12} + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

De buigpunten zijn $(0, 0)$ en $(-2, 1\frac{1}{3})$.

4b $f'(0) = -\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 = 0 \Rightarrow$ de raaklijn in $(0,0)$ is horizontaal.

5 $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (1+x)e^x \Rightarrow f''(x) = 1 \cdot e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (2+x)e^x = 0 \Rightarrow 2+x = 0 \Rightarrow x = -2$.

$f(-2) = -2 \cdot e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \Rightarrow$ buigpunt $(-2, -\frac{2}{e^2})$ en rc_{buigraaklijn} $= f'(-2) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$.

buigraaklijn $k: y = -\frac{1}{e^2}x + b$ $\Rightarrow -\frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2} \cdot -2 + b \Rightarrow -\frac{4}{e^2} = b$. Dus buigraaklijn $k: y = -\frac{1}{e^2}x - \frac{4}{e^2}$.

6a ☐ $f_5(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x - 5 \Rightarrow f_5'(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 5 \Rightarrow f_5''(x) = 3x^2 - 12x + 10$.

$f_5''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 10 = 0$ met $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 144 - 120 = 24 > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

$f_5''(x) = 0$ heeft dus twee verschillende oplossingen (enkelvoud) \Rightarrow twee buigpunten.

6b ☐ $f_6(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 5x - 5 \Rightarrow f_6'(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 \Rightarrow f_6''(x) = 3x^2 - 12x + 12$.

$f_6''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0$ met $D = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 - 144 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 (= -\frac{-12}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2)$.

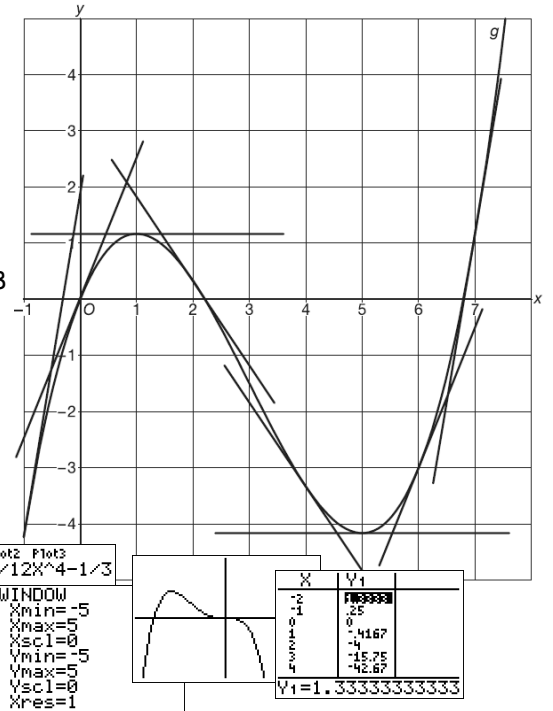
$f_6''(x) = 0$ heeft één oplossing (dubbeltellend $\Rightarrow f''$ wisselt niet van teken) \Rightarrow geen buigpunt (zie een plot van f_6 rond $x = 2$).

UITLEG: De grafiek van $f''(x) = 3x^2 - 12x + 12$ is een dalparabool, want de 3 voor x^2 is positief. Omdat $D = 0$ heeft f'' één (dubbeltellend) nulpunt $\Rightarrow f''$ wisselt niet van teken $\Rightarrow f'$ geen extreem $\Rightarrow f$ geen buigpunt.

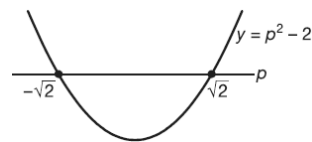
6c ☐ $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 5 \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12ax^2 + 6bx + 2c = 0$ met als mogelijkheden:

- $D < 0 \Rightarrow$ geen $x \Rightarrow f''(x) = 0$ heeft geen oplossing \Rightarrow geen buigpunt.
- $D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ heeft één oplossing (dubbeltellend $\Rightarrow f''$ wisselt niet van teken) \Rightarrow geen buigpunt.
- $D > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f''(x) = 0$ heeft dus twee verschillende oplossingen (enkelvoud) \Rightarrow twee buigpunten.



7 \square $f_p(x) = x^4 + px^3 + \frac{3}{4}x^2 + 10 \Rightarrow f_p'(x) = 4x^3 + 3px^2 + \frac{3}{2}x \Rightarrow f_p''(x) = 12x^2 + 6px + \frac{3}{2}$.
 $f_p''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 6px + \frac{3}{2} = 0$ met $D = (6p)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{3}{2} = 36p^2 - 72$.
 Geen buigpunten $\Rightarrow D \leq 0 \Rightarrow 36p^2 - 72 \leq 0 \Rightarrow p^2 - 2 \leq 0 \Rightarrow p^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}$.



8a $f(x) = \frac{5+10\ln(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot \frac{10}{x} - (5+10\ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{10-5-10\ln(x)}{x^2} = \frac{5-10\ln(x)}{x^2}$.

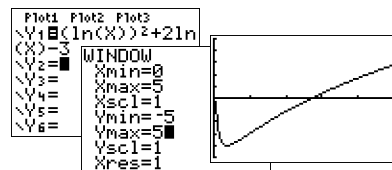
$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5-10\ln(x)}{x^2} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow 5-10\ln(x) = 0 \Rightarrow 10\ln(x) = 5 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Maximum (zie figuur 13.3): $f(\sqrt{e}) = \frac{5+10\ln(e^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{e}} = \frac{5+10 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{10}{\sqrt{e}} \Rightarrow B_f = (\left\langle \cdot, \frac{10}{\sqrt{e}} \right\rangle]$. (de y -as ($x = 0$) is verticale asymptoot)

8b $f'(x) = \frac{5-10\ln(x)}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{-10}{x} - (5-10\ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-10x-10x+20x\ln(x)}{x^4} = \frac{20x\ln(x)-20x}{x^4} = \frac{20\ln(x)-20}{x^3}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{20\ln(x)-20}{x^3} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow 20\ln(x) = 20 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$.

$f(e) = \frac{5+10\ln(e)}{e} = \frac{5+10}{e} = \frac{15}{e}$. Dus buigpunt $(e, \frac{15}{e})$.



9a $f(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 3 \Rightarrow f'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x}(\ln(x) + 1) = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Minimum (zie plot): $f(\frac{1}{e}) = (\ln(e^{-1}))^2 + 2\ln(e^{-1}) - 3 = (-1)^2 + 2 \cdot -1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \Rightarrow \text{Top}(\frac{1}{e}, -4)$.

9b $f'(x) = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1) = 2 \cdot x^{-1} \cdot (\ln(x) + 1) \Rightarrow f''(x) = -2x^{-2} \cdot (\ln(x) + 1) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2} \cdot (-\ln(x) - 1 + 1) = \frac{-2\ln(x)}{x^2}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2\ln(x)}{x^2} = 0$ (teller = 0) $\Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$.

$f(1) = (\ln(1))^2 + 2\ln(1) - 3 = -3 \Rightarrow$ buigpunt $(1, -3)$ en rc_{buigraaklijn} $= f'(1) = \frac{2}{1}(\ln(1) + 1) = 2 \cdot (0 + 1) = 2$.

buigraaklijn: $y = 2x + b$ } $\Rightarrow -3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow -5 = b$. Dus buigraaklijn: $y = 2x - 5$.
 door buigpunt $(1, -3)$

9c $F(x) = x\ln^2(x) - 3x \Rightarrow F'(x) = 1 \cdot \ln^2(x) + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} - 3 = \ln^2(x) + 2\ln(x) - 3 = f(x)$.

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln^2(x) + 2\ln(x) - 3 = 0$ (stel $\ln(x) = t$) $\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-1) = 0 \Rightarrow$
 $t = \ln(x) = -3 \vee t = \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^{-3} \vee x = e^1 = e$.

$O(V) = \int_{e^{-3}}^e -f(x) dx = [-x\ln^2(x) + 3x]_{e^{-3}}^e = -e \cdot 1^2 + 3 \cdot e - (-e^{-3} \cdot (-3)^2 + 3e^{-3}) = 2e - (-9e^{-3} + 3e^{-3}) = 2e + \frac{6}{e^3}$.

10a $f(x) = 6xe^{-\frac{1}{24}x^3} \Rightarrow f'(x) = 6 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + 6x \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2 = (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$.

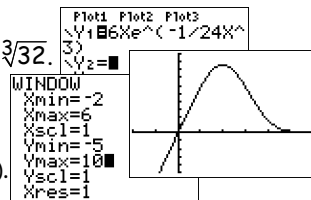
$f'(x) = 0 \Rightarrow (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}x^3 = 6 \Rightarrow x^3 = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8 = 2^3 \Rightarrow x_{\text{top}} = 2$.

10b $f'(x) = (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \Rightarrow f''(x) = -\frac{9}{4}x^2 \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} + (6 - \frac{3}{4}x^3) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} \cdot -\frac{1}{8}x^2 = (-3x^2 + \frac{3}{32}x^5) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (-3x^2 + \frac{3}{32}x^5) \cdot e^{-\frac{1}{24}x^3} = 0 \Rightarrow -3x^2 + \frac{3}{32}x^5 = 0 \Rightarrow 3x^2(-1 + \frac{1}{32}x^3) = 0 \Rightarrow$
 $x^2 = 0 \vee \frac{1}{32}x^3 = 1 \Rightarrow x \cdot x = 0$ ($x = 0$ dubbeltellend \Rightarrow vold. niet) $\vee x^3 = 32 \Rightarrow x_{\text{buigpunt}} = \sqrt[3]{32}$.

10c $f'(0) = 6 \cdot e^0 = 6 \Rightarrow k: y = 6x$ is de raaklijn door $O(0, 0)$.

Lees nu in een plot af: $f(x) = ax$ (f snijden met een lijn door O) heeft één oplossing voor $a \leq 0$ (een horizontale of dalende lijn door O snijdt f alleen in O) $\vee a = 6$ (de raaklijn in O).



11 $f(x) = 4\sin^2(x) \Rightarrow f'(x) = 8\sin(x) \cdot \cos(x) = 4\sin(2x) \Rightarrow f''(x) = 4\cos(2x) \cdot 2 = 8\cos(2x)$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 8\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$. Nu x op $[0, \pi] \Rightarrow x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{3}{4}\pi$.

$x = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow y = f(\frac{1}{4}\pi) = 4\sin^2(\frac{1}{4}\pi) = 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 \Rightarrow$ buigpunt: $(\frac{1}{4}\pi, 2)$.

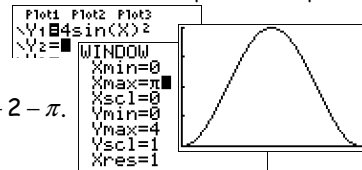
Buigraaklijn $k: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{4}\pi) = 4\sin(2 \cdot \frac{1}{4}\pi) = 4\sin(\frac{1}{2}\pi) = 4 \cdot 1 = 4$.

$k: y = 4x + b$ door $(\frac{1}{4}\pi, 2) \Rightarrow 2 = 4 \cdot \frac{1}{4}\pi + b \Rightarrow 2 = \pi + b \Rightarrow 2 - \pi = b$. Dus $k: y = 4x + 2 - \pi$.

$x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow y = f(\frac{3}{4}\pi) = 4\sin^2(\frac{3}{4}\pi) = 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 2 \Rightarrow$ buigpunt: $(\frac{3}{4}\pi, 2)$.

Buigraaklijn $l: y = ax + b$ met $a = f'(\frac{3}{4}\pi) = 4\sin(2 \cdot \frac{3}{4}\pi) = 4\sin(\frac{3}{2}\pi) = 4 \cdot -1 = -4$.

$l: y = -4x + b$ door $(\frac{3}{4}\pi, 2) \Rightarrow 2 = -4 \cdot \frac{3}{4}\pi + b \Rightarrow 2 = -3\pi + b \Rightarrow 2 + 3\pi = b$. Dus $l: y = -4x + 2 + 3\pi$.



12a $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2 \cdot a}$ en $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2 \cdot a}$. Dus $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

12b $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$.
 $f''(x) = 0 \Rightarrow 6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x_C = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x_A + x_B = -\frac{2b}{3a}$ (zie 12a) $\Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Opmerking: Omdat gegeven is dat de grafiek van f twee toppen heeft, heeft $f'(x) = 0$ twee oplossingen.
 Dus de discriminant D van $f'(x) = 0$ kan niet kleiner dan of gelijk aan nul zijn.

12c $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (met $a \neq 0$) $\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$.
 $f''(x) = 0 \Rightarrow 6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$.

Dus $f''(x) = 0$ heeft precies één oplossing want $a \neq 0 \Rightarrow f'(x)$ heeft precies één extreem.
 Dus de grafiek van f heeft precies één buigpunt. (opmerking: als $a = 0$ dan is f geen derdegraadsfunctie)

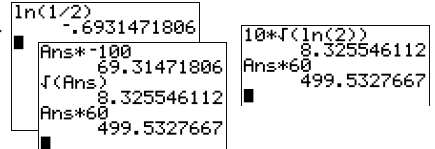
13a $C(t) = -0,0004t^3 + 0,04t^2 + 0,28t \Rightarrow C'(t) = \frac{dC}{dt} = -0,0012t^2 + 0,08t + 0,28$.

13b $C'(t) = \frac{dC}{dt}$ is de snelheid in mg per liter per minuut (mg/ltr/min) waarmee de hoeveelheid C verandert.

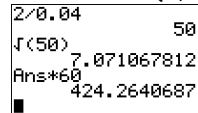
13c $C'(t) = \frac{dC}{dt} = -0,0012t^2 + 0,08t + 0,28$ maximaal (optie maximum loslaten op de formule van $C'(t)$ of) \Rightarrow
 $C''(t) = -0,0024t + 0,08 = 0 \Rightarrow 0,08 = 0,0024t \Rightarrow t = \frac{0,08}{0,0024} = \frac{800}{24} = \frac{100}{3} \approx 33,3$ (min).

14 $T(t) = 20 + 80e^{-0,2t} \Rightarrow T'(t) = \frac{dT}{dt} = 80e^{-0,2t} \cdot -0,2 = -16e^{-0,2t} < 0$ (een e -macht is steeds positief).
 $T'(t) = \frac{dT}{dt} = -16e^{-0,2t} \Rightarrow T''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dt} \right) = -16e^{-0,2t} \cdot -0,2 = 3,2e^{-0,2t} > 0$ (een e -macht is steeds positief).
 $T'(t) = \frac{dT}{dt} < 0$ ($\Rightarrow T$ dalend) en $T''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dt} \right) > 0$ ($\Rightarrow T'$ stijgend) \Rightarrow daling wordt minder $\Rightarrow T$ afnemend dalend.
 Het afkoelingsproces verloopt dus steeds langzamer.

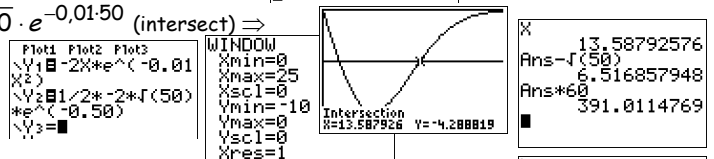
15a $V(t) = 100e^{-0,01t^2} = 50$ (intersect of) $\Rightarrow e^{-0,01t^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow -0,01t^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
 $t^2 = -100 \cdot \ln(2^{-1}) = 100 \cdot \ln(2) \Rightarrow t = \sqrt{100 \cdot \ln(2)} = 10 \cdot \sqrt{\ln(2)} \approx 8,33$ (min).
 (negatieve waarden voor t voldoen niet, omdat het kantelen begint bij $t = 0$)
 Na ongeveer 500 seconden is de helft weggestroomd.



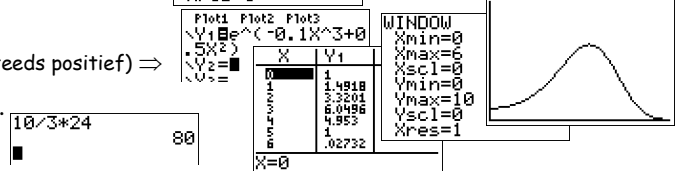
15b De uitstroomsnelheid $V'(t) = \frac{dV}{dt}$ maximaal $\Rightarrow V''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{dt} \right) = 0$.
 $V(t) = 100e^{-0,01t^2} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 100e^{-0,01t^2} \cdot -0,02t = -2t \cdot e^{-0,01t^2} \Rightarrow$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{dt} \right) = -2 \cdot e^{-0,01t^2} + -2t \cdot e^{-0,01t^2} \cdot -0,02t = -2 \cdot e^{-0,01t^2} + 0,04t^2 \cdot e^{-0,01t^2} = e^{-0,01t^2} \cdot (0,04t^2 - 2)$.
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{dt} \right) = 0 \Rightarrow e^{-0,01t^2} \cdot (0,04t^2 - 2) = 0$ (een e -macht is steeds positief) \Rightarrow
 $0,04t^2 = 2 \Rightarrow t^2 = 50$ ($t > 0$) $\Rightarrow t = \sqrt{50}$ (min). Dit na (ongeveer) 424 seconden.



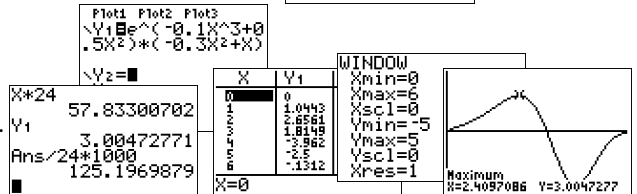
15c De uitstroomsnelheid $\frac{dV}{dt} = -2t \cdot e^{-0,01t^2} = \frac{1}{2} \cdot -2 \cdot \sqrt{50} \cdot e^{-0,01 \cdot 50}$ (intersect) \Rightarrow
 (de waarde vóór $t = \sqrt{50}$ voldoet niet) $t \approx 13,59$ (min).
 Dus na (ongeveer) $(\text{Ans} - \sqrt{50}) \cdot 60 \approx 391$ seconden.



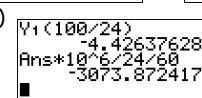
16a $N = e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} \cdot (-0,3t^2 + t)$.
 $\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} \cdot (-0,3t^2 + t) = 0$ (een e -macht is steeds positief) \Rightarrow
 $-0,3t^2 + t = 0 \Rightarrow t(-0,3t + 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \frac{-1}{-0,3} = \frac{10}{3}$.
 Het maximum (zie een plot) bij $t = \frac{10}{3}$ (dag) \Rightarrow na 80 uur.



16b $\frac{dN}{dt} = e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} \cdot (-0,3t^2 + t)$ (optie maximum) \Rightarrow
 $t \approx 2,41$ (dagen) en $\frac{dN}{dt} \max \approx 3,00$ (miljard/dag).
 Dus na (ongeveer) 58 uur is de groeisnelheid maximaal.
 De snelheid ongeveer 125 miljoen bacteriën/uur.



16c $\left[\frac{dN}{dt} \right]_{t=\frac{100}{24}} = \left[e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} \cdot (-0,3t^2 + t) \right]_{t=\frac{100}{24}} \approx -4,426...$ (miljard bacteriën/dag)
 Dit is een afname van $\frac{-\text{Ans} \cdot 1000000}{24 \cdot 60} \approx 3074$ duizend bacteriën/min.



16d $\frac{dN}{dt} = (-0,3t^2 + t) \cdot e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dN}{dt} \right) = (-0,6t + 1) \cdot e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} + (-0,3t^2 + t) \cdot e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} \cdot (-0,3t^2 + t)$
 $= (-0,6t + 1) \cdot e^{-0,1t^3 + 0,5t^2} + (-0,3t^2 + t)^2 \cdot e^{-0,1t^3 + 0,5t^2}$
 $= (-0,6t + 1 + (-0,3t^2 + t)^2) \cdot e^{-0,1t^3 + 0,5t^2}$

$\left[\frac{dN}{dt} \right]_{\frac{110}{24}} \approx -4,12 < 0 \Rightarrow$ de helling van N is negatief \Rightarrow dalend
 $\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dN}{dt} \right) \right]_{\frac{110}{24}} \approx 2,89 > 0 \Rightarrow$ de helling stijgt \Rightarrow de daling van N neemt af $\Rightarrow N$ is afnemend dalend na 110 uur.

17 $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5) = x^4 - 8x^2 + 15 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 16$
 $f'(1) = 4 - 16 < 0 \Rightarrow$ de helling van f is negatief \Rightarrow dalend
 $f''(1) = 12 - 16 < 0 \Rightarrow$ de helling daalt \Rightarrow de daling van f neemt toe $\Rightarrow f$ is toenemend dalend voor $x = 1$.

18 $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2 - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+2}{(x^2+1)^2}$
 $f''(x) = \frac{(x^2+1)^2 \cdot (-4x-2) - (-2x^2-2x+2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1) \cdot (-4x-2) - (-2x^2-2x+2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3}$
 $= \frac{-4x^3-2x^2-4x-2+8x^3+8x^2-8x}{(x^2+1)^3} = \frac{4x^3+6x^2-12x-2}{(x^2+1)^3}$

$f'(-3) < 0$ én $f''(-3) < 0 \Rightarrow$ toenemend dalend voor $x_A = -3$.
 $f'(0) > 0$ én $f''(0) < 0 \Rightarrow$ afnemend stijgend voor $x_B = 0$.
 $f'(1) < 0$ én $f''(1) < 0 \Rightarrow$ toenemend dalend voor $x_C = 1$.

19a $s(1) = 0,2 \cdot 1^2 + 0,1 \cdot 1 = 0,2 + 0,1 = 0,3$ (m) en $s(3) = 0,2 \cdot 3^2 + 0,1 \cdot 3 = 1,8 + 0,3 = 2,1$ (m).
 Op het interval $[1, 3]$ is $v_{gem} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{2,1 - 0,3}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9$ (m/s).

19b $s = 0,2t^2 + 0,1t \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = 0,4t + 0,1$.

19c $v(4) = 0,4 \cdot 4 + 0,1 = 1,6 + 0,1 = 1,7$ (m/s) en $v(5) = 0,4 \cdot 5 + 0,1 = 2 + 0,1 = 2,1$ (m/s).

19d Op het interval $[4, 5]$ is de snelheid met $v(5) - v(4) = 2,1 - 1,7 = 0,4$ m/s toegenomen.
 Op het interval $[5, 6]$ neemt de snelheid toe met $v(6) - v(5) = 0,4 \cdot 6 + 0,1 - 2,1 = 2,5 - 2,1 = 0,4$ m/s.

19e $v(t+1) - v(t) = 0,4 \cdot (t+1) + 0,1 - (0,4 \cdot t + 0,1) = 0,4t + 0,4 + 0,1 - 0,4t - 0,1 = 0,4$.
 Op elk interval $[t, t+1]$ neemt de snelheid toe met 0,4 m/s.

20 Bij toenemende snelheid is de versnelling positief en bij afnemende snelheid is de versnelling negatief, dus de snelheid zal maximaal zijn als de versnelling nul is.

21a $s(0) = -0,00028 \cdot 0^3 + 0,14 \cdot 0^2 = 0$ (m) en $s(300) = -0,00028 \cdot 300^3 + 0,14 \cdot 300^2 = 5040$ (m).
 In de eerste 300 seconden (5 minuten) wordt $s(300) - s(0) = 5040$ meter afgelegd.

21b $\frac{5040}{300} \text{ m/s} = \frac{5040}{300} \times 3600 \text{ m/u} = \frac{5040}{300} \times \frac{3600}{1000} \text{ km/u} = \frac{5040}{300} \cdot 3,6 \text{ km/u} = 60 \text{ km/u}$.

21c De snelheid is maximaal op $t = \frac{-0,28}{-0,00168} = 166,66\dots$ (s).
 v_{max} (in km/u) = $v(\text{Ans}) \times 3,6 = 84$ (km/u).

22a $s(0) = -0,00004 \cdot 0^3 + 0,036 \cdot 0^2 = 0$ (m) en $s(600) = -0,00004 \cdot 600^3 + 0,036 \cdot 600^2 = 4320$ (m).
 De gemiddelde snelheid over de gehele fietstocht is $\frac{4320}{600} = 7,2 \text{ m/s} \approx 26 \text{ km/u}$.

22b $s(t) = -0,00004t^3 + 0,036t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = -0,00012t^2 + 0,072t \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = -0,00024t + 0,072$.
 $a(t) > 0 \Rightarrow -0,00024t + 0,072 > 0 \Rightarrow -0,00024t > -0,072 \Rightarrow t < 300$.
 Voor $t < 300$ neemt de snelheid $v(t)$ toe.

22c $v_{max} = v(300) = -0,00012 \cdot 300^2 + 0,072 \cdot 300 = 10,8 \text{ m/s} \approx 39 \text{ km/u}$.

22d $a(t) < 0,02 \Rightarrow -0,00024t + 0,072 < 0,02 \Rightarrow -0,00024t < -0,052 \Rightarrow t > 216,7$.
 Vanaf $t \approx 216,7$ is de versnelling $a(t)$ minder dan $0,02 \text{ m/s}^2$.

23a $s(0) = 0,003 \cdot 0^3 - 0,5 \cdot 0^2 + 40 \cdot 0 = 0$ (m) en $s(50) = 0,003 \cdot 50^3 - 0,5 \cdot 50^2 + 40 \cdot 50 = 1125$ (m).
 In de eerste 50 seconden wordt $s(50) - s(0) = 1125$ meter afgelegd.

23b $s(t) = 0,003t^3 - 0,5t^2 + 40t \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = 0,009t^2 - t + 40 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 0,018t - 1$.
 $a(t)$ is een lineaire functie met $a(0) = -1$ en $a(50) = -0,1 \Rightarrow$ de versnelling is gedurende de eerste 50 seconden steeds negatief \Rightarrow de snelheid neemt voortdurend af.

23c $v(t)$ minimaal $\Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow 0,018t - 1 = 0 \Rightarrow 0,018t = 1 \Rightarrow t \approx 55,6$ (sec).

$v_{\min} \cdot 3,6$ (in km/u) $= v(\text{Ans}) \cdot 3,6 = (0,009 \cdot \text{Ans}^2 - \text{Ans} + 40) \cdot 3,6 = 44$ km/u.

23d $s(100) = 0,003 \cdot 100^3 - 0,5 \cdot 100^2 + 40 \cdot 100 = 2000$ (m).

$v_{\text{gem}} = \frac{s(100) - s(0)}{100 - 0} = \frac{2000 - 0}{100} = 20$ (m/s).

$v(t) = 20 \Rightarrow 0,009t^2 - t + 40 = 20$ (intersect of abc-formule) $\Rightarrow t \approx 26,2$ (s) en $t \approx 85,0$ (s).

23e $-0,2 < a(t) < 0,2 \Rightarrow -0,2 < 0,018t - 1 < 0,2 \Rightarrow 0,8 < 0,018t < 1,2 \Rightarrow \frac{0,8}{0,018} < t < \frac{1,2}{0,018}$.

Dus gedurende $\frac{1,2}{0,018} - \frac{0,8}{0,018} \approx 22$ seconden.

24a $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = -t^2 + 12t \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = -2t + 12$.

24b Primitiveren van $a(t) = -3t + 10$ geeft $v(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 10t + c$. De constante c is nog onbekend.



25ab $O(W) = \int_0^{10} a(t) dt = [v(t)]_0^{10} = v(10) - v(0) = v(10) - 0 = v(10)$.

25c $O(W) = \int_0^{10} a(t) dt = [v(t)]_0^{10} = v(10) - v(0) = v(10) - 2 \neq v(10)$.

26a $a(t) = -t^2 + 6t \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + c$ met $v(0) = 0$ (gegeven) $\Rightarrow v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2$. Dus $v(6) = -\frac{1}{3} \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 = 36$ (m/s).

26b $v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + c \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{12}t^4 + t^3 + c$ met $s(0) = 0$ (gegeven) $\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{12}t^4 + t^3$. Dus $s(6) = -\frac{1}{12} \cdot 6^4 + 6^3 = 108$ (m).

26c $s(10) = s(6) + 4 \cdot v(6) = 108 + 4 \cdot 36 = 252$ (m).

26d Voor $t \geq 6$ geldt: $s(t) = s(6) + (t - 6) \cdot v(6)$.

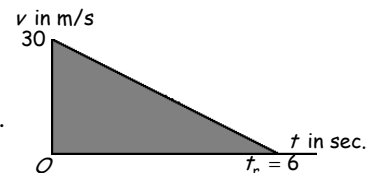
$s(t) = 500 \Rightarrow 500 = 108 + (t - 6) \cdot 36 \Rightarrow 500 = 36t - 108 \Rightarrow 608 = 36t \Rightarrow t = \frac{608}{36} = 16 \frac{8}{9}$.

27a $v(0) = 72 : 3,6 = 20$ (m/s). Tevens neemt de snelheid lineair af, want de versnelling is constant.

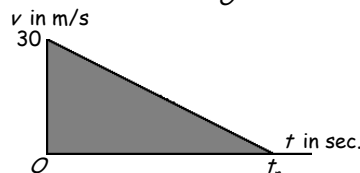
27b $O = \int_0^{t_r} v(t) dt = [s(t)]_0^{t_r} = s(t_r) - s(0) = s(t_r) - 0 = s(t_r) = 30$
 $O = \frac{1}{2} \cdot t_r \cdot 20$ (oppervlakte van de blauwe driehoek) $= 10 \cdot t_r$
 $\Rightarrow 10 \cdot t_r = 30 \Rightarrow t_r = 3$ (s).

28a $v(0) = 108 : 3,6 = 30$ (m/s).

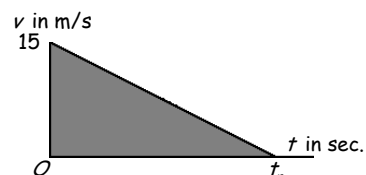
$O = \int_0^{t_r} v(t) dt = [s(t)]_0^{t_r} = s(t_r) - s(0) = s(t_r) - 0 = s(t_r) = 90$
 $O = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 30 = 90$
 \Rightarrow remweg $s(6) = 90$ (m).



28b $O = \int_0^{t_r} v(t) dt = [s(t)]_0^{t_r} = s(t_r) - s(0) = s(t_r) - 0 = s(t_r) = 60$
 $O = \frac{1}{2} \cdot t_r \cdot 30 = 15t_r$
 $\Rightarrow 15 \cdot t_r = 60 \Rightarrow t_r = 4$ (s).



29a $v(0) = 54 : 3,6 = 15$ (m/s).
 $O = \int_0^{t_r} v(t) dt = [s(t)]_0^{t_r} = s(t_r) - s(0) = s(t_r) - 0 = s(t_r) = 0,75$
 $O = \frac{1}{2} \cdot t_r \cdot 15 = 7,5t_r$
 $\Rightarrow 7,5 \cdot t_r = 0,75 \Rightarrow t_r = 0,1$ (s).



29b $a = \frac{15}{0,1} = 150$ (m/s²). Dus 15 keer zo groot als $g = 10$ (m/s²).

30a Voor de auto (A) geldt:
 $a_A(t) = 1,5 \Rightarrow v_A(t) = 1,5t + c_1$ met $v_A(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow v_A(t) = 1,5t$.
 $v_A(t) = 1,5t \Rightarrow s_A(t) = \frac{1}{2} \cdot 1,5t^2 + c_2$ met $s_A(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow s_A(t) = 0,75t^2$.
 Voor de brommer (B) geldt: $v_B(t) = 10 \Rightarrow s_B(t) = 10t + c_3$ met $s_B(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \Rightarrow s_B(t) = 10t$.
 $s_A(t) = s_B(t) \Rightarrow 0,75t^2 = 10t \Rightarrow 0,75t^2 - 10t = 0 \Rightarrow t \cdot (0,75t - 10) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee 0,75t = 10 \Rightarrow t = 0 \vee t = \frac{10}{0,75}$.
 Dus na $13\frac{1}{3}$ seconde haalt de auto de brommer weer in.

30b $v_A(13\frac{1}{3}) = 1,5 \cdot 13\frac{1}{3} = 20$ (m/s). Dit is een snelheid van 72 km/u.

31a k door $O(0, 0)$ en $P(p, e^p) \Rightarrow rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_p - y_0}{x_p - x_0} = \frac{e^p - 0}{p - 0} = \frac{e^p}{p}$.

31b $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. Dus $rc_k = [f'(x)]_{x=p} = e^p$.

31c $\frac{e^p}{p} = e^p \Rightarrow \frac{e^p}{p} = \frac{e^p}{1} \Rightarrow p = 1$. Dus $P(1, e^1) = P(1, e)$ en $rc_k = e^1 = e$. De raaklijn door O is $k: y = ex$.

32a m door $O(0, 0)$ en $P(p, f(p)) \Rightarrow rc_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_p - y_0}{x_p - x_0} = \frac{f(p) - 0}{p - 0} = \frac{f(p)}{p} \Rightarrow f'(p) = \frac{f(p)}{p}$.
 m raakt in P met $x_p = p \Rightarrow rc_m = f'(p)$

32b $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$. Dus $rc_m = f'(p) = \frac{1}{p}$. Invullen in: $f'(p) = \frac{f(p)}{p} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{\ln(p)}{p} \Rightarrow \ln(p) = 1 \Rightarrow p = e^1 = e$.
 $x = p = e \Rightarrow y_p = f(p) = f(e) = \ln(e) = 1 \Rightarrow P(e, 1)$ en $rc_m = f'(p) = f'(e) = \frac{1}{e}$. Dus $m: y = \frac{1}{e}x$.

33 $f(x) = \sqrt{x} (x \geq 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$.

Raaklijn door $A(-4, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x + 4}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 0}{x + 4} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x + 4} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot (x + 4) \Rightarrow 2x = x + 4 \Rightarrow x = 4.$$

$$x = 4 \Rightarrow y = f(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow B(4, 2) \text{ en } rc_k = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}.$$

$$k: y = \frac{1}{4}x + b \text{ door } B(4, 2) \Rightarrow 2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b \Rightarrow 2 = 1 + b \Rightarrow 1 = b. \text{ Dus } k: y = \frac{1}{4}x + 1.$$

34a $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x$.

Raaklijnen door $O(0, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

$$2x = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \vee x = 1.$$

$$x = -1 \Rightarrow rc_k = f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2 \Rightarrow k: y = -2x \text{ en } x = 1 \Rightarrow rc_l = f'(1) = 2 \Rightarrow l: y = 2x.$$

34b Raaklijnen door $A(1, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x) - 0}{x - 1}$.

$$2x = \frac{x^2 + 1 - 0}{x - 1} \Rightarrow \frac{2x}{1} = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \Rightarrow 2x^2 - 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ met } D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8 \Rightarrow$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \vee x = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

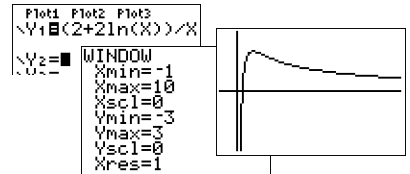
$$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{2})^2 + 1 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})^2 + 1 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{raakpunt } (1 - \sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}).$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = (1 + \sqrt{2})^2 + 1 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{raakpunt } (1 + \sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}).$$

35a $f(x) = \frac{2 + 2\ln(x)}{x} (x > 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot \frac{2}{x} - (2 + 2\ln(x)) \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2 - 2\ln(x)}{x^2} = \frac{-2\ln(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ (teller = 0)} \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1.$$

Maximum (zie plot) $f(1) = \frac{2 + 2\ln(e^0)}{1} = \frac{2 + 0}{1} = \frac{2}{1} = 2$. Dit geeft: $B_f = \langle \leftarrow, 2 \rangle$.



35b $f'(x) = \frac{-2\ln(x)}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{-2}{x} - (-2\ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x + 4x\ln(x)}{x^4} = \frac{x \cdot (-2 + 4\ln(x))}{x^4} = \frac{-2 + 4\ln(x)}{x^3}$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2 + 4\ln(x)}{x^3} = 0 \text{ (teller = 0)} \Rightarrow -2 + 4\ln(x) = 0 \Rightarrow 4\ln(x) = 2 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \Rightarrow f(\sqrt{e}) = \frac{2 + 2\ln(e^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{e}} = \frac{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{3}{\sqrt{e}}. \text{ Het buigpunt is } \left(\sqrt{e}, \frac{3}{\sqrt{e}} \right).$$

35c Raaklijn door $O(0, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

$$\frac{-2\ln(x)}{x^2} = \frac{2+2\ln(x)}{x} \Rightarrow \frac{-2\ln(x)}{x^2} = \frac{2+2\ln(x)}{x^2} \Rightarrow -2\ln(x) = 2+2\ln(x) \Rightarrow -4\ln(x) = 2 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow rc_k = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-2\ln(e^{-\frac{1}{2}})}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{-2 \cdot -\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = 1 \cdot \frac{e}{1} = e. \text{ Dit geeft } k: y = ex.$$

35d $\frac{2+2\ln(x)}{x} = ax$ ($f(x)$ snijden met een lijn door de oorsprong).

Voor $a = e$ raakt de lijn door de oorsprong de grafiek van f (zie 35c).

Voor $0 < a < e$ snijdt de lijn door de oorsprong de grafiek van f in twee punten (zie de plot bij 35a).

(de lijn $y = ax$ door O moet stijgend zijn maar minder steil dan de raaklijn uit O) Dus het antwoord is $0 < a < e$.

36a $f(x) = (2x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+1) \cdot e^x = (2x+3)e^x$.

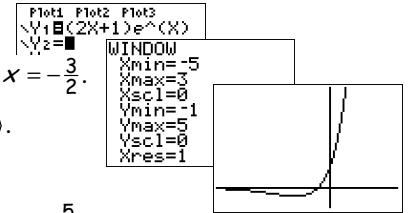
$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x+3)e^x = 0 \text{ (} e\text{-macht is steeds positief)} \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Minimum (zie plot)} f\left(-\frac{1}{2}\right) = (-3+1)e^{-\frac{1}{2}} = -2 \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{e\sqrt{e}}. \text{ Dus } B_f = \left[-\frac{2}{e\sqrt{e}}, \rightarrow\right).$$

$$f'(x) = (2x+3) \cdot e^x \Rightarrow f''(x) = 2 \cdot e^x + (2x+3) \cdot e^x = (2x+5)e^x.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (2x+5)e^x = 0 \text{ (} e\text{-macht is alleen positief)} \Rightarrow 2x+5=0 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

$$f\left(-2\frac{1}{2}\right) = (-5+1)e^{-2\frac{1}{2}} = -4 \cdot \frac{1}{e^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{4}{e^2 \cdot \sqrt{e}}. \text{ Het buigpunt is } \left(-2\frac{1}{2}, -\frac{4}{e^2 \sqrt{e}}\right).$$



36b Raaklijnen door $O(0, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

$$(2x+3)e^x = \frac{(2x+1)e^x}{x} \Rightarrow \frac{2x+3}{1} = \frac{2x+1}{x} \Rightarrow 2x^2+3x = 2x+1 \Rightarrow 2x^2+x-1=0 \Rightarrow (2x-1)(x+1) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1.$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow rc_k = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e} \Rightarrow k: y = 4\sqrt{e}x \text{ en } x = -1 \Rightarrow rc_l = f'(-1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow l: y = \frac{1}{e}x.$$

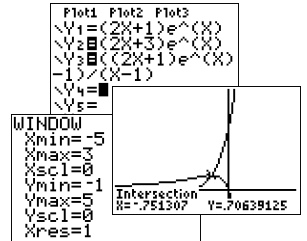
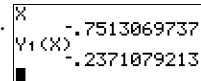
36c Voor $a = \frac{1}{e}$ en $a = 4\sqrt{e}$ is er één oplossing (zie 36b).

Voor $0 < a < \frac{1}{e}$ en $a > 4\sqrt{e}$ heeft $(2x+1)e^x = ax$ twee oplossingen (zie de plot bij 36a).

36d Raaklijnen door $A(1, 1) \Rightarrow$ de x -coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$.

$$(2x+3)e^x = \frac{(2x+1)e^x - 1}{x-1} \text{ (intersect met de voorwaarde } x < 0) \Rightarrow x \approx -0,75.$$

$$x \approx -0,75 \Rightarrow y = f(x) \approx -0,24 \Rightarrow \text{raakpunt } P(-0,75; -0,24).$$



37a $f(x) = x \ln(x) - x$ (met $x > 0$ vanwege $\ln \dots$) $\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

Raaklijn door $A(0, -e^2) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x) - (-e^2)}{x}$.

$$\frac{\ln(x)}{1} = \frac{x \ln(x) - x + e^2}{x} \Rightarrow x \ln(x) = x \ln(x) - x + e^2 \Rightarrow x = e^2.$$

$$x = e^2 \Rightarrow rc_k = f'(e^2) = \ln(e^2) = 2 \Rightarrow k: y = 2x + b \text{ door } A(0, -e^2) \Rightarrow k: y = 2x - e^2.$$

37b 1. $rc_l = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1$.

$$f(1) = 1 \cdot \ln(1) - 1 = 1 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow \text{raaklijn in top } B(1, -1).$$

/ door $B(1, -1)$ ($\Rightarrow x_B = b = 1$) met $rc_l = 0$ (doet net niet mee).

Voor $b \leq 1$ is er geen stijgende raaklijn / door $B(b, -1)$ aan de grafiek van f (wel de horizontale in de top én eventueel een dalende raaklijn)

2. $rc = 1 \Rightarrow f'(x) = \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$ en $y = f(e) = e \cdot \ln(e) - e = 0$.

De raaklijn in $(e, 0)$ heeft $rc_l = 1$ (er geldt net niet $0 < rc_l < 1$).

Raaklijn $l: y = 1x + q$ in $(e, 0) \Rightarrow 0 = 1 \cdot e + q \Rightarrow q = -e$.

$l: y = x - e$ snijden met $y = -1 \Rightarrow x - e = -1 \Rightarrow x = e - 1$.

/ door $B(e-1, -1)$ ($\Rightarrow x_B = b = e-1$) met $rc_l = 1$ (doet net niet mee).

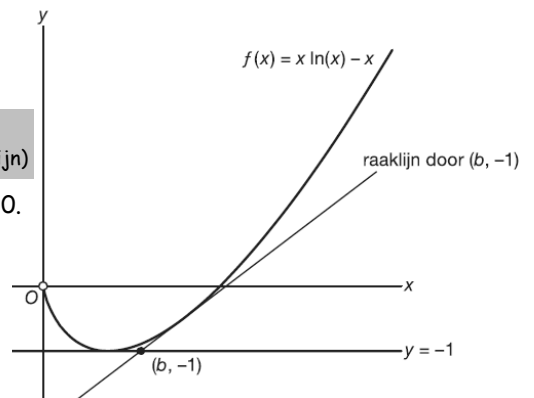
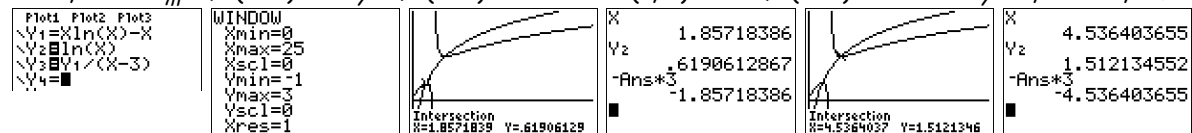
3. Samenvattend: b tussen $b = 1$ en $b = e-1 \Rightarrow 1 < b < e-1$.

37c De x -coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)-0}{x-3}$.

$$\frac{\ln(x)}{1} = \frac{x \ln(x) - x}{x-3} \Rightarrow (x-3) \cdot \ln(x) = x \ln(x) - x \text{ (intersect)} \Rightarrow x \approx 1,86 \vee x \approx 4,54.$$

$$x \approx 1,86 \Rightarrow rc_m = f'(Ans) \Rightarrow m: y = f'(Ans)x + b \text{ door } C(3, 0) \Rightarrow 0 = f'(Ans) \cdot 3 + b \Rightarrow m: y \approx 0,62x - 1,86.$$

$$x \approx 4,54 \Rightarrow rc_n = f'(Ans) \Rightarrow n: y = f'(Ans)x + b \text{ door } C(3, 0) \Rightarrow 0 = f'(Ans) \cdot 3 + b \Rightarrow n: y \approx 1,51x - 4,54.$$



38a $f(x) = xe^{1-x} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot -1 = (1-x)e^{1-x} \Rightarrow f''(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (1-x)e^{1-x} \cdot -1 = (x-2)e^{1-x}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-2)e^{1-x} = 0$ (e -macht is steeds positief) $\Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.

$f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ buigpunt $B(2, \frac{2}{e})$. Verder is $rc_k = f'(2) = (1-2)e^{1-2} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

$k: y = -\frac{1}{e}x + b$ door $B(2, \frac{2}{e}) \Rightarrow \frac{2}{e} = -\frac{1}{e} \cdot 2 + b \Rightarrow \frac{4}{e} = b \Rightarrow$ buigraaklijn $k: y = -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e}$.

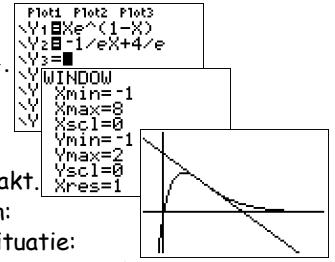
k snijden met de x -as ($y=0$) $\Rightarrow -\frac{1}{e}x + \frac{4}{e} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{e}x = -\frac{4}{e} \Rightarrow x=4$. Dus $A(4, 0)$.

Er is geen lijn door een punt P op de positieve x -as links van A die de grafiek van f raakt.

Door een punt P op de x -as rechts van A zijn er twee lijnen die de grafiek van f raken:

één aan de bovenkant en één aan de onderkant. De lijn k door $A(4, 0)$ is de overgangssituatie:

de lijn k door $A(4, 0)$ raakt de grafiek aan de bovenkant én aan de onderkant, het is een buigraaklijn.



38b De lijn $y = a(x + \frac{1}{2})$ heeft $rc = a$ en gaat door $(-\frac{1}{2}, 0)$ (links van de oorsprong).

Uit de plot in 38a is af te lezen dat $f(x) = a(x + \frac{1}{2})$ precies één oplossing heeft

als $a \leq 0$ of als de lijn $y = a(x + \frac{1}{2})$ raakt aan de grafiek van f .

Raaklijnen door $(-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaten van de raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)-0}{x+\frac{1}{2}}$.

$(1-x)e^{1-x} = \frac{xe^{1-x}}{x+\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1-x}{1} = \frac{x}{x+\frac{1}{2}} \Rightarrow x = (1-x)(x+\frac{1}{2}) \Rightarrow x = x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x+1)(x-\frac{1}{2}) = 0$.

$x = -1 \Rightarrow a = f'(-1) = (1+1)e^{1+1} = 2e^2$ en $x = \frac{1}{2} \Rightarrow a = f'(\frac{1}{2}) = (1-\frac{1}{2})e^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e}$.

Conclusie: $a \leq 0 \vee a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{e} \vee a = 2e^2$.

39a De 1^e raaklijn door A is de x -as (raakt de grafiek van f in de oorsprong);

de 2^e raaklijn door A raakt f ergens links van de y -as en

de 3^e raaklijn door A raakt f ergens tussen de twee toppen.

39b Vanuit B één raaklijn (de x -as); vanuit C geen raaklijnen; vanuit D twee raaklijnen (één rustend boven op de grafiek in de buurt van de tweede top en één hangend onder tegen de grafiek rechts in de schets) en vanuit E één raaklijn (de raaklijn uit E raakt de grafiek van f links van de y -as).

39c Er zijn drie punten op de x -as van waaruit je precies twee raaklijnen kunt tekenen:
 het punt O (met als 1^e raaklijn de x -as en als 2^e raaklijn de lijn door O rustend op de grafiek van f ergens tussen de twee toppen);
 het punt op de x -as van de linker buigraaklijn (met als 1^e raaklijn de x -as en als 2^e raaklijn deze buigraaklijn) en
 het punt op de x -as van de rechter buigraaklijn (met als 1^e raaklijn de x -as en als 2^e raaklijn deze tweede buigraaklijn).

39d Het snijpunt van de rechter buigraaklijn met de y -as (met enige raaklijn vanuit dit punt op de y -as deze buigraaklijn).

40a $f(1) = 0,5 \cdot 1^2 + 1 + 1,5 = 3$ en $g(1) = -(1)^2 + 4 \cdot 1 = 3$.

40b $f(x) = 0,5x^2 + x + 1,5 \Rightarrow f'(x) = x + 1$
 $f'(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow k: y = 2x + b$
 k door $(1, 3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$
 $k: y = 2x + 1$.

$g(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow g'(x) = -2x + 4$
 $g'(1) = -2 + 4 = 2 \Rightarrow l: y = 2x + b$
 l door $(1, 3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$
 $l: y = 2x + 1$.

40c f en g hebben in $A(1, 3)$ dezelfde raaklijn \Rightarrow de grafieken van f en g raken elkaar in $A(1, 3)$.

41 De grafieken van f en g hebben voor $x = -3$ geen punt gemeenschappelijk, dus raken elkaar zeker niet. Wel geldt voor de raaklijn k in $(-3, f(-3))$ en de raaklijn l in $(-3, g(-3))$ evenwijdig lopen omdat $rc_k = rc_l$.

42a $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$
 Raken: $f(x) = g(x)$
 $x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = x^2 + 11x + 28$
 $x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$ (loopt even vast) ❶
 $(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 9 \cdot (-3) - 27 = 0$ (klopt)
 (dus de grafieken van f en g raken elkaar)
 $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 27 \neq 0$ (klopt niet)

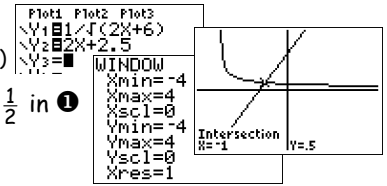
$$\begin{array}{l} (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 9 \\ * -3 - 27 \\ 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 - 27 \\ -32 \end{array}$$

$g(x) = x^2 + 11x + 28 \Rightarrow g'(x) = 2x + 11$
 $f'(x) = g'(x)$
 $3x^2 + 8x + 2 = 2x + 11$
 $3x^2 + 6x - 9 = 0$
 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x+3)(x-1) = 0$
 $x = -3 \vee x = 1$ nu hiernaast invullen in ❶

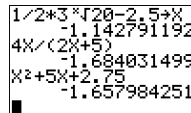
42b $g(-3) = (-3)^2 + 11 \cdot (-3) + 28 = 9 - 33 + 28 = 4$ en $g'(-3) = 2 \cdot (-3) + 11 = 5$.
 $k: y = 5x + b$ door $(-3, 4) \Rightarrow 4 = 5 \cdot (-3) + b \Rightarrow b = 19$.
 De gemenschappelijke raaklijn is: $k: y = 5x + 19$.

43 $f(x) = \sqrt{2x+6} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x+6}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$
 Raken: $f(x) = g(x)$
 $\sqrt{2x+6} = x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$ ①
 ...
 $f(-1) = \sqrt{4} = 2$ en $g(-1) = (-1)^2 + 2\frac{1}{2} \cdot -1 + 3\frac{1}{2} = 1 - 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 2$ (zijn ook gelijk).
 Dus de grafieken van f en g raken elkaar (voor $x = -1$).

$g(x) = x^2 + 2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \Rightarrow g'(x) = 2x + 2\frac{1}{2}$
 $f'(x) = g'(x)$
 $\frac{1}{\sqrt{2x+6}} = 2x + 2\frac{1}{2}$ (intersect)
 $x = -1$ en $f'(-1) = g'(-1) = \frac{1}{2}$ in ①



44 $f(x) = \frac{4x}{2x+5} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+5) \cdot 4 - 4x \cdot 2}{(2x+5)^2} = \frac{20}{(2x+5)^2}$
 Raken: $f(x) = g(x)$
 $\frac{4x}{2x+5} = x^2 + 5x + 2\frac{3}{4}$ (hoe verder???) ①
 $f(\frac{1}{2}) \cdot \sqrt[3]{20} - 2\frac{1}{2} \approx -1,684$
 $g(\frac{1}{2}) \cdot \sqrt[3]{20} - 2\frac{1}{2} \approx -1,658$ (zijn niet gelijk)
 Dus de grafieken van f en g raken elkaar niet.

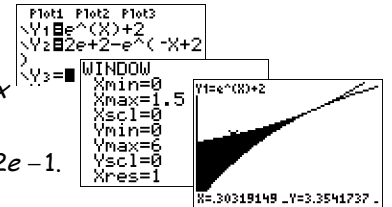


$g(x) = x^2 + 5x + 2\frac{3}{4} \Rightarrow g'(x) = 2x + 5$
 $f'(x) = g'(x)$
 $\frac{20}{(2x+5)^2} = 2x + 5$
 $(2x+5)^3 = 20$
 $2x + 5 = \sqrt[3]{20} \Rightarrow 2x = \sqrt[3]{20} - 5 \Rightarrow$
 $x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{20} - 2\frac{1}{2}$ nu invullen in ①

45a $f(x) = e^x + 2 \Rightarrow f'(x) = e^x$
 Raken: $f(x) = g(x)$
 $e^x + 2 = 2e + 2 - e^{-x+2}$ ①
 $f(1) = e + 2$ en $g(1) = 2e + 2 - e = e + 2$ (zijn gelijk)
 Dus de grafieken van f en g raken elkaar in $(1, e + 2)$.

$g(x) = 2e + 2 - e^{-x+2} \Rightarrow g'(x) = -e^{-x+2} \cdot -1 = e^{-x+2}$
 $f'(x) = g'(x)$
 $e^x = e^{-x+2} \Rightarrow x = -x + 2 \Rightarrow$
 $2x = 2$
 $x = 1$ invullen in ①

45b $O(V) = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (e^x + 2 - (2e + 2 - e^{-x+2})) dx = \int_0^1 (e^x - 2e + e^{-x+2}) dx$
 $= [e^x - 2ex - e^{-x+2}]_0^1 = e - 2e - e - (e^0 - 0 - e^2) = -2e - (1 - e^2) = e^2 - 2e - 1$



46a $f(x) = \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$
 Raken: $f(x) = g_1(x)$
 $\sqrt{2x} = x^2 + 1$ (kwadrateren geeft 4^e macht) ①
 $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{1} = 1$ en $g_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 1$ (zijn niet gelijk)
 Dus de grafieken van f en g_1 raken elkaar niet.

$g_1(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g_1'(x) = 2x$
 $f'(x) = g_1'(x)$
 $\frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x \Rightarrow \frac{1}{2x} = 4x^2 \Rightarrow 8x^3 = 1$
 $x^3 = \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$
 $x = \frac{1}{2}$ invullen in ①

46b Raken: $f(x) = g_p(x)$
 $\sqrt{2x} = x^2 + p$ ①
 $\sqrt{1} = \frac{1}{4} + p$
 Dus de grafieken van f en g_1 raken elkaar voor $p = \frac{3}{4}$.

$f'(x) = g_p'(x)$
 $\frac{1}{\sqrt{2x}} = 2x$
 $x = \frac{1}{2}$ (zie 46a) invullen in ①



47a $x - \ln(x) = px$ ($x > 0$) en $1 - \frac{1}{x} = p$ ($x \neq 0 \Rightarrow x \cdot (1 - \frac{1}{x}) = x \cdot p \Rightarrow x - 1 = px$)
 $x - \ln(x) = px$ en $x - 1 = px \Rightarrow x - \ln(x) = x - 1$.

47b $x - \ln(x) + 2 = p\sqrt{x}$ ($x > 0$) en $1 - \frac{1}{x} = \frac{p}{2 \cdot \sqrt{x}}$ ($x \neq 0$)
 (delen door \sqrt{x}) (vermenigvuldigen met $2 \cdot \sqrt{x}$)
 $\frac{x - \ln(x) + 2}{\sqrt{x}} = p$ en $2 \cdot \sqrt{x} \cdot (1 - \frac{1}{x}) = p$
 $\frac{x - \ln(x) + 2}{\sqrt{x}} = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot (1 - \frac{1}{x})$ (optie intersect $\Rightarrow x$ en p direct in 3 decimalen).

Het voordeel van deze aanpak is dat je meteen p vindt, want p is de y -coördinaat van de grafieken die je op de GR hebt ingevoerd.

48 $f(x) = -x^2 + 8x - 12 \Rightarrow f'(x) = -2x + 8$
 Raken: $f(x) = g(x)$
 $-x^2 + 8x - 12 = x^2 + px$ ①
 ...
 $-x^2 + 8x - 12 = x^2 + (-4x + 8)x \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 = x^2 - 4x^2 + 8x \Rightarrow 2x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow$
 $x = -\sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}$ invullen in ② $\Rightarrow p = 4 \cdot \sqrt{6} + 8 \vee p = -4 \cdot \sqrt{6} + 8$.

$g(x) = x^2 + px \Rightarrow g'(x) = 2x + p$
 $f'(x) = g'(x)$
 $-2x + 8 = 2x + p$
 $-4x + 8 = p$ ② invullen in ①

49 $f(x) = x - e^x \Rightarrow f'(x) = 1 - e^x$

Raken: $f(x) = g_p(x)$

$$x - e^x = x^2 + px$$

$$px = x - e^x - x^2$$

$$p = 1 - \frac{e^x}{x} - x \quad \textcircled{1}$$

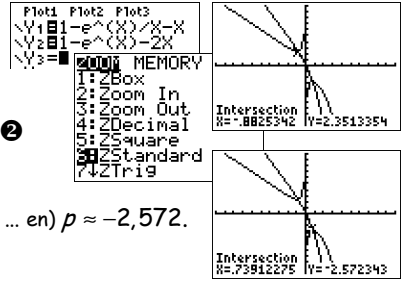
$$g_p(x) = x^2 + px \Rightarrow g_p'(x) = 2x + p.$$

$$\wedge f'(x) = g_p'(x)$$

$$\wedge 1 - e^x = 2x + p$$

$$\wedge p = 1 - e^x - 2x \quad \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow p = 1 - \frac{e^x}{x} - x = 1 - e^x - 2x$ (intersect) $\Rightarrow (x \approx \dots \text{ en}) p \approx 2,351 \vee (x \approx \dots \text{ en}) p \approx -2,572.$



50a $f_3(x) = 2\ln(x) + 3x (x > 0) \Rightarrow f_3'(x) = \frac{2}{x} + 3$

Raken: $f_3(x) = g_q(x)$

$$2\ln(x) + 3x = x^2 + q$$

$$q = 2\ln(x) + 3x - x^2 \quad \textcircled{1}$$

...

$$q = 2\ln(2) + 3 \cdot 2 - 2^2$$

$$= 2\ln(2) + 2.$$

$$g_q(x) = x^2 + q \Rightarrow g_q'(x) = 2x.$$

$$\wedge f_3'(x) = g_q'(x)$$

$$\wedge \frac{2}{x} + 3 = 2x \text{ (vermenigvuldigen met } x \neq 0)$$

$$\wedge 2 + 3x = 2x^2$$

$$\wedge x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1 = 0$$

$$(x + \frac{1}{2})(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ (vold. niet)} \vee x = 2 \text{ invullen in } \textcircled{1}$$

50b $f_p(x) = 2\ln(x) + px (x > 0) \Rightarrow f_p'(x) = \frac{2}{x} + p$

Raken: $f_p(x) = g_2(x)$

$$2\ln(x) + px = x^2 + 2 \quad \textcircled{1}$$

...

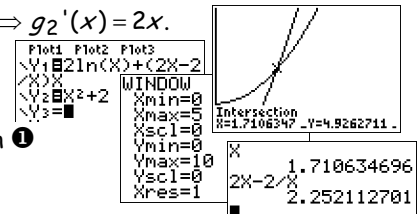
$$2\ln(x) + (2x - \frac{2}{x})x = x^2 + 2 \Rightarrow x \approx \text{in } \textcircled{2} \Rightarrow p \approx 2,252.$$

$$g_2(x) = x^2 + 2 \Rightarrow g_2'(x) = 2x.$$

$$\wedge f_p'(x) = g_2'(x)$$

$$\wedge \frac{2}{x} + p = 2x$$

$$\wedge p = 2x - \frac{2}{x} \quad \textcircled{2} \text{ in } \textcircled{1}$$



51 $f_p(x) = 2x + p\ln(x) (x > 0) \Rightarrow f_p'(x) = 2 + \frac{p}{x}$

Raken: $f_p(x) = g_p(x)$

$$2x + p\ln(x) = px^2$$

$$p\ln(x) - px^2 = -2x$$

$$p(\ln(x) - x^2) = -2x$$

$$p = \frac{-2x}{\ln(x) - x^2} \quad \textcircled{1}$$

...

$\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow p = \frac{-2x}{\ln(x) - x^2} = \frac{-2x}{1 - 2x^2}$ (intersect) $\Rightarrow (x = 1 \text{ en}) p = 2.$

$$g_p(x) = px^2 \Rightarrow g_p'(x) = 2px.$$

$$\wedge f_p'(x) = g_p'(x)$$

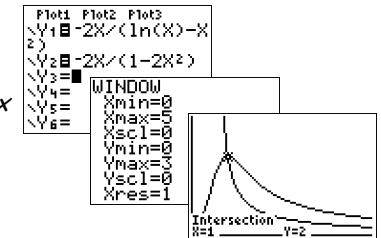
$$\wedge 2 + \frac{p}{x} = 2px \text{ (vermenigvuldigen met } x \neq 0)$$

$$\wedge 2x + p = 2px^2$$

$$\wedge p - 2px^2 = -2x$$

$$\wedge p(1 - 2x^2) = -2x$$

$$\wedge p = \frac{-2x}{1 - 2x^2} \quad \textcircled{2}$$

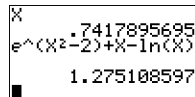


52 $f(x) = e^{x^2-2} + x \Rightarrow f'(x) = e^{x^2-2} \cdot 2x + 1 = 2xe^{x^2-2} + 1$

Raken: $f(x) = g_q(x)$

$$e^{x^2-2} + x = \ln(x) + q$$

$$q = e^{x^2-2} + x - \ln(x) \quad \textcircled{1}$$



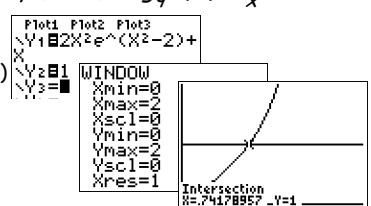
$$\wedge f'(x) = g_q'(x)$$

$$\wedge 2xe^{x^2-2} + 1 = \frac{1}{x} \text{ (verm. met } x \neq 0)$$

$$\wedge 2x^2e^{x^2-2} + x = 1 \text{ (intersect)}$$

$$x \approx 0,742 \text{ in } \textcircled{1} \Rightarrow q \approx 1,275.$$

$$g_q(x) = \ln(x) + q (x > 0) \Rightarrow g_q'(x) = \frac{1}{x}.$$



53 $rc_j = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$

$k \perp / \Leftrightarrow rc_k \times rc_l = -1$

54 $f(x) = \sqrt{x} (x \geq 0) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$

Loodrecht snijden: $f(x) = g(x)$

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 10 \quad \textcircled{1}$$

...

$$\sqrt{4} = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 10$$

$$2 = -8 + 10 \text{ (klopt)}$$

Dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10 \Rightarrow g'(x) = -x.$$

$$\wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$$

$$\wedge \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot -x = -1$$

$$\wedge \frac{-x}{2\sqrt{x}} = -1$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2} = 1$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$x = 4$ (voldoet) in $\textcircled{1}$

55 $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$ $g(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x) \Rightarrow g'(x) = -\sqrt{2} \cdot \sin(x)$
 Loodrecht snijden: $f(x) = g(x)$ \wedge $f'(x) \cdot g'(x) = -1$
 $\sqrt{2} \cdot \sin(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$ \wedge $\sqrt{2} \cdot \cos(x) \cdot -\sqrt{2} \cdot \sin(x) = -1$
 $\sin(x) = \cos(x)$ \wedge $-2 \sin(x) \cos(x) = -1$
 $\cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \cos(x)$ \wedge $\sin(2x) = 1$
 $(x - \frac{1}{2}\pi = x + k \cdot 2\pi \vee x - \frac{1}{2}\pi = -x + k \cdot 2\pi)$ \wedge $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 (voldoet niet) $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ \wedge $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

Dit klopt, dus de grafieken snijden elkaar loodrecht.

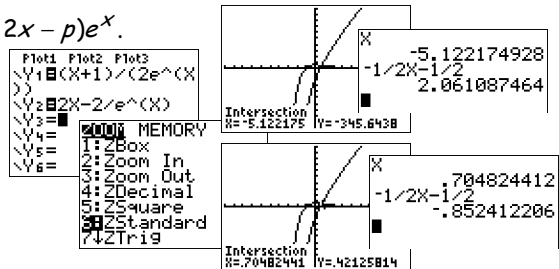
56 $f_p(x) = p\sqrt{x} (x \geq 0) \Rightarrow f_p'(x) = \frac{p}{2\sqrt{x}} (x > 0)$ $g(x) = \frac{8}{x} = 8x^{-1} (x \neq 0) \Rightarrow g'(x) = -8x^{-2} = -\frac{8}{x^2} (x \neq 0)$
 $f_p(x) = g(x)$ \wedge $f_p'(x) \cdot g'(x) = -1$
 $p\sqrt{x} = \frac{8}{x} \Rightarrow p = \frac{8}{x \cdot \sqrt{x}}$ \wedge $\frac{p}{2\sqrt{x}} \cdot -\frac{8}{x^2} = -1 \Rightarrow p = \frac{2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x}}{8} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{4}$
 $\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow \frac{8}{x \cdot \sqrt{x}} = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{4} \Rightarrow x^4 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[4]{32} (< 0 \text{ voldoet niet}) \vee x = \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \sqrt[4]{2}$
 $x = 2 \cdot \sqrt[4]{2}$ in $\textcircled{2} \Rightarrow p = \frac{(2^4)^2 \cdot (2^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}}{2^2} = \frac{2^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{8}}}{2^2} = \frac{2^{\frac{5}{8} + \frac{5}{8}}}{2^2} = \frac{2^{\frac{20}{8} + \frac{5}{8}}}{2^2} = \frac{2^{\frac{25}{8}}}{2^2} = 2^{\frac{25}{8} - 2} = 2^{\frac{9}{8}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2 \cdot \sqrt[8]{2}$
 $g(2 \cdot \sqrt[4]{2}) = \frac{8}{2^{\frac{5}{4}}} = \frac{2^3}{2^{\frac{5}{4}}} = 2^{(3 - \frac{5}{4})} = 2^{\frac{7}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 2 \cdot \sqrt[4]{8}$. Het snijpunt is $(2 \cdot \sqrt[4]{2}, 2 \cdot \sqrt[4]{8})$.

57a $f(x) = x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$ met $f'(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$. $(f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 25 - 20 = 5 \Rightarrow A$ ligt inderdaad op $f)$
 k snijdt f in $x = 5$ loodrecht $\Rightarrow f'(5) \cdot rc_k = -1 \Rightarrow 6 \cdot rc_k = -1 \Rightarrow rc_k = -\frac{1}{6}$
 $k: y = -\frac{1}{6}x + b$ door $A(5, 5) \Rightarrow 5 = -\frac{1}{6} \cdot 5 + b \Rightarrow b = 5\frac{5}{6}$. Dus $k: y = -\frac{1}{6}x + 5\frac{5}{6}$.

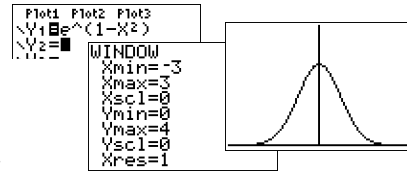
57b $g(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow g'(x) = \frac{(x+2) \cdot 2 - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$
 $g(x) = -5x + p$ \wedge $g'(x) \cdot rc_g = -1$
 $\frac{2x-1}{x+2} = -5x + p$ \wedge $\frac{5}{(x+2)^2} \cdot -5 = -1$
 $p = \frac{2x-1}{x+2} + 5x$ $\textcircled{1}$ \wedge $\frac{25}{(x+2)^2} = 1$
 ... \wedge $(x+2)^2 = 25 \Rightarrow x+2 = 5 \vee x+2 = -5 \Rightarrow x = 3 \vee x = -7$
 Invullen in $\textcircled{1}$ geeft $(x = 3 \Rightarrow) p = \frac{5}{5} + 15 = 1 + 15 = 16$ en $(x = -7 \Rightarrow) p = \frac{-15}{-5} - 35 = 3 - 35 = -32$.

57c $h(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} \cdot 2 - 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x}{x^2+4} = \frac{2\sqrt{x^2+4} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = \frac{2(x^2+4) - 2x^2}{(x^2+4) \cdot \sqrt{x^2+4}} = \frac{8}{(x^2+4) \cdot \sqrt{x^2+4}}$
 $h(x) = -8x + q$ \wedge $h'(x) \cdot rc_m = -1$
 $\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} = -8x + q$ \wedge $\frac{8}{(x^2+4) \cdot \sqrt{x^2+4}} \cdot -8 = -1$
 $q = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} + 8x$ $\textcircled{1}$ \wedge $\frac{64}{(x^2+4) \cdot \sqrt{x^2+4}} = 1$
 ... \wedge $(x^2+4)^{\frac{3}{2}} = 64 = 2^6 \Rightarrow x^2+4 = 2^4 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12}$ in $\textcircled{1} \Rightarrow$
 $x = \sqrt{12} \Rightarrow q = \frac{2 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{12+4}} + 8 \cdot \sqrt{12} = \frac{2}{4} \cdot \sqrt{12} + 8 \cdot \sqrt{12} = 8\frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} = 8\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = 17 \cdot \sqrt{3}$
 $x = -\sqrt{12} \Rightarrow q = \frac{2 \cdot -\sqrt{12}}{\sqrt{12+4}} + 8 \cdot -\sqrt{12} = -\frac{2}{4} \cdot \sqrt{12} - 8 \cdot \sqrt{12} = -8\frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} = -17 \cdot \sqrt{3}$.

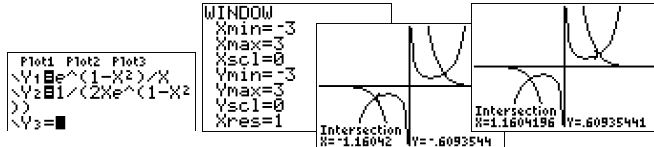
58 $f_p(x) = (x^2 - p)e^x \Rightarrow f_p'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - p) \cdot e^x = (x^2 + 2x - p)e^x$
 $f_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} (\bullet)$ \wedge $f_p'(x) \cdot rc_k = -1$
 $(x^2 - p)e^x = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ \wedge $(x^2 + 2x - p)e^x \cdot -\frac{1}{2} = -1$
 $x^2 - p = -\frac{x}{2e^x} - \frac{1}{2e^x}$ \wedge $(x^2 + 2x - p)e^x = 2$
 $p = x^2 + \frac{x}{2e^x} + \frac{1}{2e^x}$ \wedge $x^2 + 2x - p = \frac{2}{e^x}$
 $p = x^2 + \frac{x+1}{2e^x} \textcircled{1}$ \wedge $p = x^2 + 2x - \frac{2}{e^x} \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow p = x^2 + \frac{x+1}{2e^x} = x^2 + 2x - \frac{2}{e^x}$ (intersect) $\Rightarrow x \approx -5,12 \vee x \approx 0,70$
 $x \approx -5,12$ in $(\bullet) \Rightarrow y \approx 2,06 \Rightarrow A(-5,12; 2,06)$ en $x \approx 0,70$ in $(\bullet) \Rightarrow y \approx -0,85 \Rightarrow A(0,70; -0,85)$.



59a $f(x) = e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{1-x^2} \cdot -2x = -2xe^{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2 \cdot e^{1-x^2} - 2x \cdot e^{1-x^2} \cdot -2x = (4x^2 - 2)e^{1-x^2}$.
 $f''(x) = 0 \Rightarrow (4x^2 - 2)e^{1-x^2} = 0$ (e -macht is alleen positief)
 $4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
 $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ en $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.
 De buigpunten (zie ook een plot) zijn $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{e})$ en $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{e})$.



59b $f(x) = ax \wedge f'(x) \cdot a = -1$
 $e^{1-x^2} = ax \wedge -2xe^{1-x^2} \cdot a = -1$
 $a = \frac{e^{1-x^2}}{x} \textcircled{1} \wedge a = \frac{1}{2xe^{1-x^2}} \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow a = \frac{e^{1-x^2}}{x} = \frac{1}{2xe^{1-x^2}}$ (intersect) $\Rightarrow x \approx -1,16$ met $a \approx -0,61 \vee x \approx 1,16$ met $a \approx 0,61$.

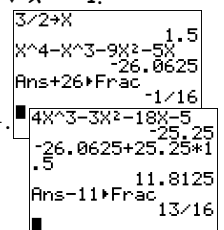


60a $f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$ $g_p(x) = \frac{p}{x} = px^{-1} (x \neq 0) \Rightarrow g_p'(x) = -px^{-2} = -\frac{p}{x^2}$.
 Raken: $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) = g_p'(x)$
 $x^3 - x = \frac{p}{x}$ (verm. met $x \neq 0$) $\wedge 3x^2 - 1 = -\frac{p}{x^2}$ (verm. met $-x^2 \neq 0$)
 $p = x^4 - x^2 \textcircled{1} \wedge p = -3x^4 + x^2 \textcircled{2}$
 $x^4 - x^2 = -3x^4 + x^2 \Rightarrow 4x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x^2 - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $x = 0$ (voldoet niet) $\vee x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \vee x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
 $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (komt van $x^2 = \frac{1}{2}$) in $\textcircled{1} \Rightarrow p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ en $y = f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \Rightarrow A(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\sqrt{2})$;
 $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (komt van $x^2 = \frac{1}{2}$) in $\textcircled{1} \Rightarrow p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ en $y = f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} \Rightarrow A(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2})$.

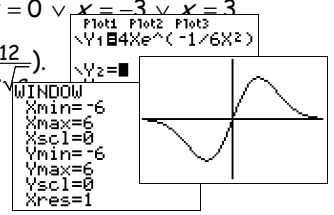
60b Loodrecht snijden: $f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$
 $x^3 - x = \frac{p}{x}$ (verm. met $x \neq 0$) $\wedge (3x^2 - 1) \cdot -\frac{p}{x^2} = -1$ (verm. met $-x^2 \neq 0$)
 $p = x^4 - x^2 \textcircled{1} \wedge p \cdot (3x^2 - 1) = x^2$
 $\dots \wedge p = \frac{x^2}{3x^2 - 1} \textcircled{2}$
 $x^4 - x^2 = \frac{x^2}{3x^2 - 1} \Rightarrow (x^4 - x^2) \cdot (3x^2 - 1) = x^2 \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot (3x^2 - 1) = 1 \Rightarrow 3x^4 - x^2 - 3x^2 + 1 = 1 \Rightarrow 3x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow$
 $3x^2(x^2 - \frac{4}{3}) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 0$ (voldoet niet) $\vee x = \sqrt{\frac{4}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.
 $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (kwam $x^2 = \frac{4}{3}$) in $\textcircled{1} \Rightarrow p = \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = \frac{16}{9} - \frac{12}{9} = \frac{4}{9}$ en $y = f(\frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3} \Rightarrow B(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3})$;
 $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (kwam $x^2 = \frac{4}{3}$) in $\textcircled{1} \Rightarrow p = \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$ en $y = f(-\frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{4}{3} \cdot -\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} = -\frac{2}{9}\sqrt{3} \Rightarrow B(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{3})$.

Diagnostische toets

D1 $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 18x - 5 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6x - 18$.
 $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 6x - 18 = 0$ (abc -formule of) $\Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x - 1\frac{1}{2})(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2} \vee x = -1$.
 $x = 1\frac{1}{2} \Rightarrow y = f(1\frac{1}{2}) = -26\frac{1}{16} \Rightarrow$ buigpunt: $(1\frac{1}{2}, -26\frac{1}{16})$.
 Buigraaklijn k : $y = ax + b$ met $a = f'(1\frac{1}{2}) = -25\frac{1}{4}$.
 k : $y = -25\frac{1}{4}x + b$ door $(1\frac{1}{2}, -26\frac{1}{16}) \Rightarrow -26\frac{1}{16} = -25\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2} + b \Rightarrow 11\frac{13}{16} = b$. Dus k : $y = -25\frac{1}{4}x + 11\frac{13}{16}$.
 $x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 1 + 1 - 9 + 5 = -2 \Rightarrow$ buigpunt: $(-1, -2)$.
 Buigraaklijn l : $y = ax + b$ met $a = f'(-1) = -4 - 3 + 18 - 5 = 6$.
 l : $y = 6x + b$ door $(-1, -2) \Rightarrow -2 = 6 \cdot -1 + b \Rightarrow -2 = -6 + b \Rightarrow 4 = b$. Dus l : $y = 6x + 4$.

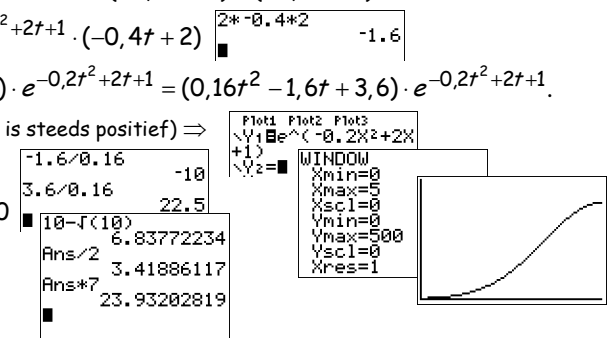


D2 \square $f(x) = 4xe^{-\frac{1}{6}x^2} \Rightarrow f'(x) = 4e^{-\frac{1}{6}x^2} + 4xe^{-\frac{1}{6}x^2} \cdot -\frac{1}{3}x = 4e^{-\frac{1}{6}x^2} \cdot (1 - \frac{1}{3}x^2)$ en
 $f''(x) = 4e^{-\frac{1}{6}x^2} \cdot -\frac{1}{3}x \cdot (1 - \frac{1}{3}x^2) + 4e^{-\frac{1}{6}x^2} \cdot -\frac{2}{3}x = -\frac{4}{3}xe^{-\frac{1}{6}x^2} \cdot (1 - \frac{1}{3}x^2 - 2) = -\frac{4}{3}xe^{-\frac{1}{6}x^2} \cdot (3 - \frac{1}{3}x^2)$
 $f''(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}xe^{-\frac{1}{6}x^2} \cdot (3 - \frac{1}{3}x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 3 - \frac{1}{3}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 = 9 \Rightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 3$
 $x = -3 \Rightarrow y = f(-3) = -12e^{-\frac{9}{6}} = \frac{-12}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{-12}{e \cdot \sqrt{e}} \Rightarrow$ buigpunt (zie plot: van bol naar hol): $(-3, \frac{-12}{e \cdot \sqrt{e}})$.
 $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \Rightarrow$ buigpunt (zie plot: van hol naar bol): $(0, 0)$.
 $x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 12e^{-\frac{9}{6}} = \frac{12}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{e \cdot \sqrt{e}} \Rightarrow$ buigpunt (zie plot: van bol naar hol): $(3, \frac{12}{e \cdot \sqrt{e}})$.



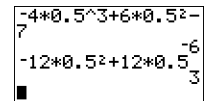
D3 \square $g(x) = \frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \Rightarrow g''(x) = \frac{x^2 \cdot -\frac{1}{x} - (1 - \ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{-3x + 2x \ln(x)}{x^4}$.
 $g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$ met $g(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow$ top: $(e, \frac{1}{e})$.
 $g''(x) = 0$ (teller = 0 en noemer $\neq 0$) $\Rightarrow 2x \ln x - 3x = 0 \Rightarrow x(2 \ln x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ (vold. niet want noemer = 0) $\vee 2 \ln(x) = 3$
Dus $\ln(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e^{1.5} = e \cdot e^{\frac{1}{2}} = e \sqrt{e}$ met $g(e \sqrt{e}) = \frac{\ln(e^{\frac{3}{2}})}{e \cdot \sqrt{e}} = \frac{\frac{3}{2}}{e \sqrt{e}} = \frac{3}{2e \sqrt{e}} \Rightarrow$ buigpunt: $(e \sqrt{e}, \frac{3}{2e \sqrt{e}})$.

D4 \square $H(t) = e^{-0,2t^2+2t+1} \Rightarrow$ de groeisnelheid $H'(t) = \frac{dH}{dt} = e^{-0,2t^2+2t+1} \cdot (-0,4t + 2) = (-0,4t + 2) \cdot e^{-0,2t^2+2t+1} \Rightarrow$
 $H''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{dt} \right) = -0,4 \cdot e^{-0,2t^2+2t+1} + (-0,4t + 2) \cdot e^{-0,2t^2+2t+1} \cdot (-0,4t + 2)$
 $= -0,4 \cdot e^{-0,2t^2+2t+1} + (0,16t^2 - 1,6t + 4) \cdot e^{-0,2t^2+2t+1} = (0,16t^2 - 1,6t + 3,6) \cdot e^{-0,2t^2+2t+1}$.

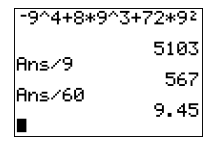


De groeisnelheid is maximaal als $\frac{d}{dt} \left(\frac{dH}{dt} \right) = 0$ (een e -macht is steeds positief) \Rightarrow
 $0,16t^2 - 1,6t + 3,6 = 0$
 $t^2 - 10t + 22,5 = 0$ met $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22,5 = 100 - 90 = 10$
 $t = \frac{10 - \sqrt{10}}{2} \approx 3,42$ (weken) $\vee t = \frac{10 + \sqrt{10}}{2} > 5$ (voldoet niet).
De groeisnelheid is maximaal na ongeveer 24 dagen.

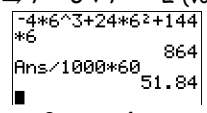
D5 \square $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 7x + 3 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 7 \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 12x$.
 $f'(\frac{1}{2}) = -4 \cdot \frac{1}{2}^3 + 6 \cdot \frac{1}{2}^2 - 7 < 0$
 $f''(\frac{1}{2}) = -12 \cdot \frac{1}{2}^2 + 12 \cdot \frac{1}{2} > 0$ \Rightarrow in A is de grafiek van f afnemend dalend.



D6a \square $s(0) = 0$ (m) en $s(9) = -9^4 + 8 \cdot 9^3 + 72 \cdot 9^2 = 5103$ (m).
De gemiddelde snelheid op $[0, 9]$ is $\frac{5103 - 0}{9 - 0} = \frac{5103}{9}$ (m/min). Dit is $\frac{5103}{9} \div 60 = 9,45$ m/s.

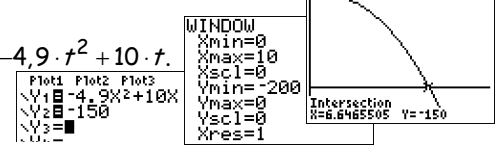


D6b \square $s(t) = -t^4 + 8t^3 + 72t^2 \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = -4t^3 + 24t^2 + 144t \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = -12t^2 + 48t + 144$.
 v maximaal $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow -12t^2 + 48t + 144 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 6)(t + 2) = 0 \Rightarrow t = 6 \vee t = -2$ (voldoet niet).
Dus $v_{\max} = v(6) = -4 \cdot 6^3 + 24 \cdot 6^2 + 144 \cdot 6 = 864$ (m/min). Dit is ongeveer 52 km/uur.



D6c \square $a(0) = -12 \cdot 0^2 + 48 \cdot 0 + 144 = 144$.
Eerst $a(t) = a(0) \Rightarrow -12t^2 + 48t + 144 = 144 \Rightarrow -12t^2 + 48t = 0 \Rightarrow 12t(-t + 4) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 4$.
 $a(t) > a(0)$ (de grafiek van a is een bergparabool) $\Rightarrow 0 < t < 4$. Dus gedurende 4 minuten.

D7 \square $a(t) = -9,8 \Rightarrow v(t) = -9,8t + v(0) \Rightarrow s(t) = -9,8 \cdot \frac{1}{2}t^2 + v(0) \cdot t + s(0) = -4,9 \cdot t^2 + 10 \cdot t$.
 $s(t) = -150 \Rightarrow -4,9 \cdot t^2 + 10 \cdot t = -150$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 6,65$ (s).



D8 \square $f(x) = \frac{x^2}{2 \ln(x)}$ (met $x > 0$ vanwege $\ln \dots$ en $\ln(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ zie ook figuur 13.18) $\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \ln(x) \cdot 2x - x^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}}{(2 \ln(x))^2} = \frac{4x \ln(x) - 2x}{(2 \ln(x))^2}$.
Raaklijn door $O(0, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.
 $\frac{4x \ln(x) - 2x}{(2 \ln(x))^2} = \frac{x}{2 \ln(x)} \Rightarrow 8x(\ln(x))^2 - 4x \ln(x) = 4x(\ln(x))^2 \Rightarrow 4x(\ln(x))^2 - 4x \ln(x) = 0 \Rightarrow 4x \cdot \ln(x) \cdot (\ln(x) - 1) = 0 \Rightarrow$
 $4x = 0 \vee \ln(x) = 0 \vee \ln(x) = 1 \Rightarrow x = 0$ (vold. niet) $\vee x = 1$ (vold. niet) $\vee x = e$.
 $x = e \Rightarrow y = f(e) = \frac{e^2}{2 \ln(e)} = \frac{e^2}{2} = \frac{1}{2}e^2 \Rightarrow$ raakpunt: $(e, \frac{1}{2}e^2)$.

D9a \square $f(x) = x - \ln(x)$ (met $x > 0$ vanwege $\ln(\dots)$) $\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Raaklijn door $A(0, -1) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)+1}{x}$.

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(x) + 1}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{x - \ln(x) + 1}{x} \Rightarrow x-1 = x - \ln(x) + 1 \Rightarrow \ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2.$$

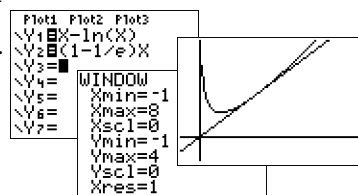
$$x = e^2 \Rightarrow rc_k = f'(e^2) = 1 - \frac{1}{e^2} \Rightarrow k: y = (1 - \frac{1}{e^2})x + b \text{ door } A(0, -1) \Rightarrow k: y = (1 - \frac{1}{e^2})x - 1.$$

D9b \square Raaklijn door $O(0,0) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(x)}{x} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{x - \ln(x)}{x} \Rightarrow x-1 = x - \ln(x) \Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e^1 = e.$$

$$x = e \Rightarrow rc_{\text{raaklijn}} = f'(e) = 1 - \frac{1}{e}.$$

$f(x) = ax$ heeft geen oplossing (zie de plot hiernaast) voor $a < 1 - \frac{1}{e}$.



D10a \square $f(x) = \ln(x^2)$ ($x > 0$) $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$

Raken: $f(x) = g(x)$

$$\ln(x^2) = x^2 - 1 \text{ (hoe verder???) } \textcircled{1}$$

$$f(1) = \ln(1) = 0 \text{ en } g(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ (zijn gelijk)}$$

$$f(-1) = \ln(1) = 0 \text{ en } g(1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ (zijn gelijk)}$$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar in $(1, 0)$ en $(-1, 0)$.

$$g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = 2x.$$

$$\wedge \quad f'(x) = g'(x)$$

$$\wedge \quad \frac{2}{x} = 2x \text{ (vermenigvuldigen met } x \neq 0)$$

$$2 = 2x^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \vee x = -1 \text{ nu invullen in } \textcircled{1}$$

D10b \square $f'(1) = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow k: y = 2x + b$ door $(1, 0) \Rightarrow 0 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -2$. Dus $k: y = 2x - 2$.

$$f'(-1) = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow l: y = -2x + b$$
 door $(-1, 0) \Rightarrow 0 = -2 \cdot (-1) + b \Rightarrow b = -2$. Dus $l: y = -2x - 2$.

D11 \square $f(x) = \frac{3}{2x^2} = \frac{3}{2}x^{-2}$ ($x \neq 0$) $\Rightarrow f'(x) = -3x^{-3} = -\frac{3}{x^3}$

Raken: $f(x) = g(x)$

$$\frac{3}{2x^2} = 2\frac{1}{2} - x^3 \textcircled{1}$$

...

$$f(1) = \frac{3}{2} \text{ en } g(1) = 2\frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2} \text{ (zijn gelijk)}$$

Dus de grafieken van f en g raken elkaar.

$$g(x) = 2\frac{1}{2} - x^3 \Rightarrow g'(x) = -3x^2.$$

$$f'(x) = g'(x)$$

$$\frac{-3}{x^3} = -3x^2 \text{ (vermenigvuldigen met } -x^3 \neq 0)$$

$$-3 = -3x^5$$

$$x^5 = 1$$

$$x = \sqrt[5]{1} = 1 \text{ invullen in } \textcircled{1}$$

D12 \square $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

Raken: $f(x) = g_p(x)$

$$x^3 - 3x = px + 16 \textcircled{1}$$

$$x^3 - 3x = x \cdot (3x^2 - 3) + 16$$

$$x^3 - 3x = 3x^3 - 3x + 16$$

$$-2x^3 = 16 \Rightarrow x^3 = -8 = (-2)^3 \Rightarrow x = -2 \text{ invullen in } \textcircled{1} \Rightarrow p = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9.$$

$$g_p(x) = px + 16 \Rightarrow g_p'(x) = p.$$

$$\wedge \quad f'(x) = g_p'(x)$$

$$\wedge \quad 3x^2 - 3 = p \textcircled{2} \text{ invullen in } \textcircled{1} \text{ geeft}$$

D13 \square $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 5}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

Loodrecht snijden: $f(x) = -1\frac{1}{2}x + 6$ \wedge $f'(x) \cdot rc_l = -1$

$$\sqrt{x^2 + 5} = -1\frac{1}{2}x + 6 \textcircled{1} \quad \wedge \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \cdot -\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{x^2 + 5} = 3x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 1\frac{1}{2}x \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow -1\frac{1}{2}x + 6 = 1\frac{1}{2}x \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$ (voldoet aan $\textcircled{1}$ en $\textcircled{2}$) $\Rightarrow l$ snijdt de grafiek van f loodrecht.

D14 \square $f(x) = \ln(x)$ ($x > 0$) $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Loodrecht snijden: $f(x) = g_p(x)$

$$\ln(x) = px$$

$$\frac{\ln(x)}{x} = p \textcircled{1}$$

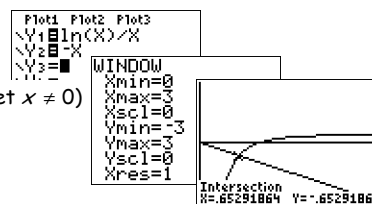
$\textcircled{1} \wedge \textcircled{2} \Rightarrow p = \frac{\ln(x)}{x} = -x$ (intersect) $\Rightarrow (x \approx 0,65 \text{ en } p \approx -0,65)$.

$$g_p(x) = px \Rightarrow g_p'(x) = p.$$

$$\wedge \quad f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$$

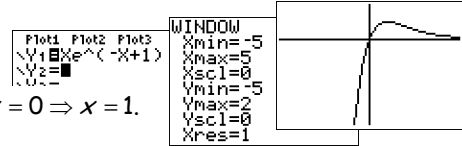
$$\wedge \quad \frac{1}{x} \cdot p = -1 \text{ (vermenigvuldigen met } x \neq 0)$$

$$\wedge \quad p = -x \textcircled{2}$$

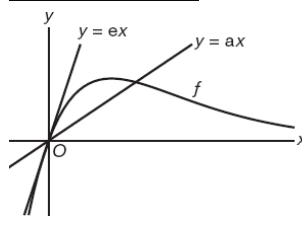


Gemengde opgaven 13. Afgeleide en tweede afgeleide

G14a $f(x) = xe^{-x+1} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x+1} + x \cdot e^{-x+1} \cdot -1 = (1-x)e^{-x+1}$.
 $f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x)e^{-x+1} = 0$ (een e -macht is alleen positief) $\Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$.
 Maximum (zie plot) $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$. Het bereik $B_f = \langle \leftarrow, 1 \rangle$.



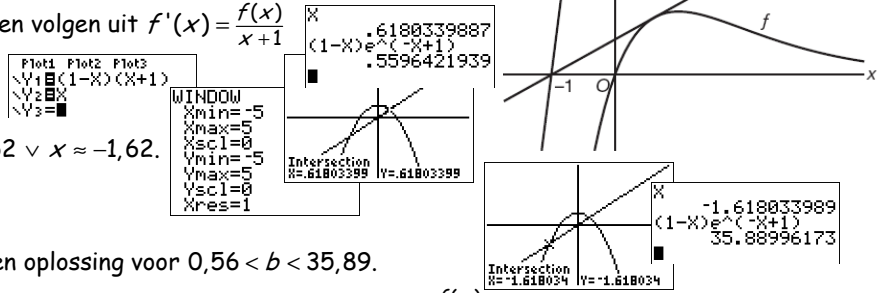
G14b $f'(x) = (1-x)e^{-x+1} \Rightarrow f''(x) = -1 \cdot e^{-x+1} + (1-x) \cdot e^{-x+1} \cdot -1 = (x-2)e^{-x+1}$.
 $f''(x) = 0 \Rightarrow (x-2)e^{-x+1} = 0$ (een e -macht is alleen positief) $\Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$.
 $f(2) = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} \Rightarrow$ het buigpunt is $(2, \frac{2}{e})$.



G14c $f'(0) = e$. Nu aflezen in een plot:
 $xe^{-x+1} = ax$ ($y = ax$ is een lijn door O) heeft één oplossing als $a \leq 0 \vee a = e$.

G14d $y = b(x+1)$ heeft richtingscoëfficiënt b en gaat door $(-1, 0)$.
 Er zijn twee raaklijnen van de grafiek die door $(-1, 0)$ gaan.

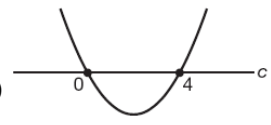
De x -coördinaten van deze raakpunten volgen uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x+1}$
 $(1-x)e^{-x+1} = \frac{xe^{-x+1}}{x+1}$
 $\frac{1-x}{1} = \frac{x}{x+1}$
 $(1-x)(x+1) = x$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 0,62 \vee x \approx -1,62$.
 $r_{c\text{raaklijn } 1} \approx f'(0,62) \approx 0,56$ en
 $r_{c\text{raaklijn } 2} \approx f'(-1,62) \approx 35,89$.



Aflezen: $xe^{-x+1} = b(x+1)$ heeft geen oplossing voor $0,56 < b < 35,89$.

G14e Raaklijn door $C(c, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x-c}$.

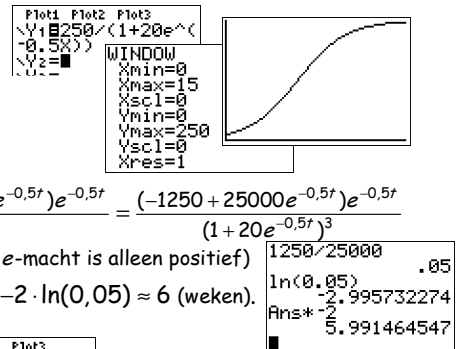
$(1-x)e^{-x+1} = \frac{xe^{-x+1}}{x-c}$ $D \geq 0$
 $(1-x)(x-c) = x$ $(-c)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c \geq 0$
 $x-c-x^2+cx = x$ $c^2 - 4c \geq 0$
 $x^2 - cx + c = 0$ $c(c-4) \geq 0$ (zie de schets hiernaast)
 Deze vergelijking heeft oplossingen $\Rightarrow D \geq 0$. $c \leq 0 \vee c \geq 4$.



G15a $f_a(x) = x^3 - 4x^2 + a \Rightarrow f'_a(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow f''_a(x) = 6x - 8$. $f''_a(x) = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow 6x = 8 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$.
 $r_{c\text{buigraaklijn}} = f'_a(\frac{4}{3}) = 3 \cdot (\frac{4}{3})^2 - 8 \cdot \frac{4}{3} = 3 \cdot \frac{16}{9} - \frac{32}{3} = \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = -\frac{16}{3} \Rightarrow$ buigraaklijn: $y = -\frac{16}{3}x$ (een lijn door de oorsprong).
 De y -coördinaat van het buigpunt is $y = -\frac{16}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{64}{9}$. (het buigpunt ligt op de grafiek van f en op de buigraaklijn)
 $f_a(\frac{4}{3}) = -\frac{64}{9} \Rightarrow (\frac{4}{3})^3 - 4 \cdot (\frac{4}{3})^2 + a = -\frac{64}{9} \Rightarrow a = \frac{64}{9} - \frac{64}{27} - \frac{64}{9} = -\frac{64}{27}$.

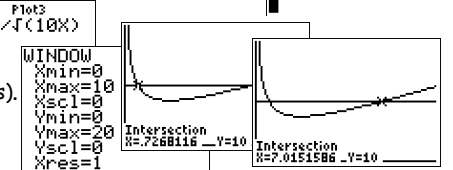
G15b $f'_a(1) = 3 - 8 = -5 < 0$ en $f''_a(1) = 6 - 8 = -2 < 0 \Rightarrow$ in A is de grafiek toenemend dalend.

G16 $h(t) = \frac{250}{1+20e^{-0,5t}} \Rightarrow h'(t) = \frac{(1+20e^{-0,5t}) \cdot 0 - 250 \cdot 20e^{-0,5t} \cdot -0,5}{(1+20e^{-0,5t})^2} = \frac{2500e^{-0,5t}}{(1+20e^{-0,5t})^2}$
 $h''(t) = \frac{(1+20e^{-0,5t})^2 \cdot 2500e^{-0,5t} \cdot -0,5 - 2500e^{-0,5t} \cdot 2(1+20e^{-0,5t}) \cdot 20e^{-0,5t} \cdot -0,5}{(1+20e^{-0,5t})^4}$
 $= \frac{(1+20e^{-0,5t})^2 \cdot -1250e^{-0,5t} + 50000e^{-0,5t} \cdot e^{-0,5t} \cdot (1+20e^{-0,5t})}{(1+20e^{-0,5t})^4}$
 $= \frac{(1+20e^{-0,5t}) \cdot -1250e^{-0,5t} + 50000e^{-0,5t} \cdot e^{-0,5t}}{(1+20e^{-0,5t})^3} = \frac{(-1250 - 25000e^{-0,5t} + 50000e^{-0,5t})e^{-0,5t}}{(1+20e^{-0,5t})^3} = \frac{(-1250 + 25000e^{-0,5t})e^{-0,5t}}{(1+20e^{-0,5t})^3}$

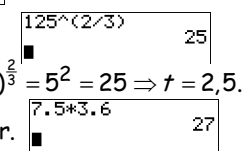


De groeisnelheid is (in een buigpunt) maximaal als $h''(t) = 0$ (\Rightarrow teller = 0 en een e -macht is alleen positief)
 $-1250 + 25000e^{-0,5t} = 0 \Rightarrow e^{-0,5t} = \frac{1250}{25000} = 0,05 \Rightarrow -0,5t = \ln(0,05) \Rightarrow t = -2 \cdot \ln(0,05) \approx 6$ (weken).

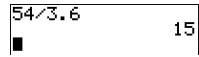
G17a $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5 \cdot \sqrt{10t} \Rightarrow s'(t) = v(t) = t + 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{10t}} \cdot 10 = t + \frac{25}{\sqrt{10t}}$.
 $s(0) = 0$ en $s(10) = \frac{1}{2} \cdot 10^2 + 5 \cdot \sqrt{10 \cdot 10} = 50 + 50 = 100 \Rightarrow v_{\text{gem.}} = \frac{100}{10} = 10$ (m/s).
 $v(t) = v_{\text{gem.}} \Rightarrow t + \frac{25}{\sqrt{10t}} = 10$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 0,73 \vee t \approx 7,02$.



G17b $v(t) = t + \frac{25}{\sqrt{10t}} = t + 25 \cdot (10t)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow v'(t) = 1 + 25 \cdot -\frac{1}{2} (10t)^{-\frac{3}{2}} \cdot 10 = 1 - \frac{125}{10t \cdot \sqrt{10t}}$.
 $v'(t) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{125}{10t \cdot \sqrt{10t}} = 0 \Rightarrow \frac{125}{10t \cdot \sqrt{10t}} = 1 \Rightarrow 10t \cdot \sqrt{10t} = 125 \Rightarrow (10t)^{\frac{3}{2}} = 125 \Rightarrow 10t = 125^{\frac{2}{3}} = (5^3)^{\frac{2}{3}} = 5^2 = 25 \Rightarrow t = 2,5$.
 Minimum (zie plot) $v(2,5) = 2,5 + \frac{25}{\sqrt{25}} = 2,5 + \frac{25}{5} = 2,5 + 5 = 7,5$ (m/s). Dit is $7,5 \cdot 3,6 = 27$ km/uur.



G18a $a(t) = v'(t) = a \Rightarrow v(t) = at + v(0)$ met $v(0) = 15$ (54 km/uur is 15 m/s). Dus $v(t) = at + 15$.
 $v(t) = s'(t) = at + 15 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t + s(0)$ met $s(0) = 0$. Dus $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t$.

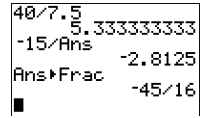


Noem de tijd t om te remmen:

$$v(t) = at + 15 = 0 \wedge s(t) = \frac{1}{2}at^2 + 15t = 40 \Rightarrow at = -15 \text{ ① } \wedge \frac{1}{2}at \cdot t + 15t = 40 \text{ ②}$$

① invullen in ② geeft: $-7,5t + 15t = 40 \Rightarrow 7,5t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{7,5} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}$ in ①

$t = \frac{16}{3}$ invullen in ① geeft dan $a \cdot \frac{16}{3} = -15 \Rightarrow a = -15 \cdot \frac{3}{16} = -15 \times \frac{3}{16} = -\frac{45}{16} = -2\frac{13}{16} = -2,8125$ (m/s²).



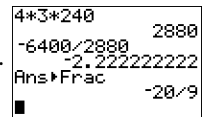
G18b Voor de auto geldt: $s_a(t) = \frac{5}{3}t + 40$ ($s(0) = 40$ en 6 km/uur is $\frac{6}{3,6} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}$ m/s).

Bij een botsing geldt: $s_w(t) = s_a(t) \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 15t = \frac{5}{3}t + 40 \Rightarrow \frac{1}{2}at^2 + 13\frac{1}{3}t - 40 = 0 \Rightarrow 3at^2 + 80t - 240 = 0$.

Er is geen botsing als $3at^2 + 80t - 240 = 0$ geen oplossingen heeft $\Rightarrow D < 0$.

$$D = 80^2 - 4 \cdot 3a \cdot -240 < 0 \Rightarrow 6400 + 2880a < 0 \Rightarrow 2880a < -6400 \Rightarrow a < -\frac{6400}{2880} = -\frac{20}{9} \approx -2,22...$$

Voor $a < -\frac{20}{9} \Rightarrow$ voor $a = -2,5$ is er geen botsing \Rightarrow de wielrenner kan op tijd stoppen.



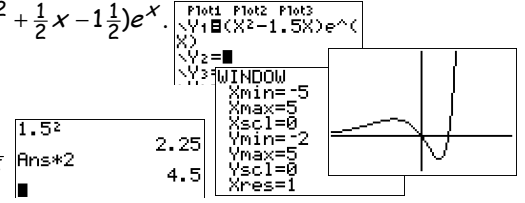
G19a $f(x) = (x^2 - 1\frac{1}{2}x)e^x \Rightarrow f'(x) = (2x - 1\frac{1}{2}) \cdot e^x + (x^2 - 1\frac{1}{2}x) \cdot e^x = (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x = 0 \text{ (een } e\text{-macht is alleen positief)} \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x + 1\frac{1}{2})(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -1\frac{1}{2} \vee x = 1.$$

Maximum (zie plot) $f(-1\frac{1}{2}) = ((-1\frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{2} \cdot -1\frac{1}{2})e^{-1\frac{1}{2}} = 4\frac{1}{2}e^{-1\frac{1}{2}} = \frac{9}{2e \cdot \sqrt{e}}$

en minimum (zie plot) $f(1) = (1 - 1\frac{1}{2})e^1 = -\frac{1}{2}e$.



G19b $f'(x) = (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x \Rightarrow f''(x) = (2x - \frac{1}{2}) \cdot e^x + (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}) \cdot e^x = (x^2 + 2\frac{1}{2}x - 1)e^x$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2\frac{1}{2}x - 1)e^x = 0 \text{ (een } e\text{-macht is alleen positief)}$$

$$x^2 + 2\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -2 = 25 + 16 = 41$$

de x -coördinaten van de buigpunten: $x = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 - \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{41}}{4}$.

G19c $f'(0) = -1\frac{1}{2} \cdot e^0 = -1\frac{1}{2} < 0$ en $f''(0) = -1 \cdot e^0 = -1 < 0 \Rightarrow$ in \mathcal{O} is de grafiek van f toenemend dalend.

G19d $f(1\frac{1}{2}) = ((1\frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2})e^{1\frac{1}{2}} = 0 \cdot e^{1\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow A(1\frac{1}{2}, 0)$ ligt op de grafiek van $f \Rightarrow k$ raakt in A .

$$rc_k = f'(1\frac{1}{2}) = ((1\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2})e^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} \cdot e^{1\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} \cdot e\sqrt{e}.$$

$$k: y = 1\frac{1}{2}e\sqrt{e}x + b = 0 \text{ door } A(1\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow k: 0 = 1\frac{1}{2}e\sqrt{e} \cdot 1\frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -2\frac{1}{4}e\sqrt{e} \Rightarrow k: y = 1\frac{1}{2}e\sqrt{e}x - 2\frac{1}{4}e\sqrt{e}.$$

$$f(x) = x - \ln(x) \text{ (met } x > 0 \text{ vanwege } \ln \dots) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Raaklijn door $A(1\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow$ de x -coördinaat van het raakpunt volgt uit $f'(x) = \frac{f(x)}{x - 1,5}$.

$$(x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})e^x = \frac{(x^2 - 1\frac{1}{2}x)e^x}{x - 1,5} \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})(x - 1\frac{1}{2}) = x^2 - 1\frac{1}{2}x \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})(x - 1\frac{1}{2}) = x(x - 1\frac{1}{2}) \Rightarrow$$

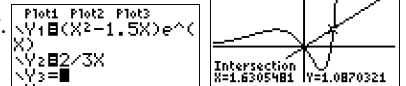
$$x^2 + \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = x \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x - 1\frac{1}{2})(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1\frac{1}{2} \text{ (voldoet niet)} \vee x = -1.$$

$$rc_l = f'(-1) = ((-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot -1 - 1\frac{1}{2})e^{-1} = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

$$l: y = -\frac{1}{e}x + b = 0 \text{ door } A(1\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow l: 0 = -\frac{1}{e} \cdot 1\frac{1}{2} + b \Rightarrow b = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{e} = \frac{3}{2e} \Rightarrow l: y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{2e}.$$

G19e Er geldt: $f'(0) \cdot rc_m = -1 \Rightarrow -1\frac{1}{2} \cdot rc_m = -1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot rc_m = 1 \Rightarrow rc_m = \frac{2}{3}$. Dus $m: y = \frac{2}{3}x$.

$$\frac{2}{3}x = (x^2 - 1\frac{1}{2}x)e^x \text{ (intersect)} \Rightarrow x \approx 1,63 \text{ en } y \approx 1,09 \Rightarrow B(1,63; 1,09).$$

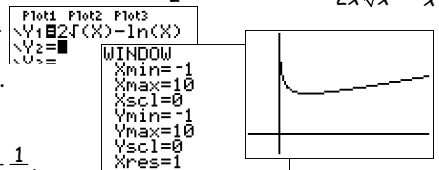


G20a $f_2(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - \ln(x) \text{ (} x > 0) \Rightarrow f_2'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} \Rightarrow f_2''(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + x^{-2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.

$$f_2''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow x^2 = 2x\sqrt{x} \text{ (kwadrateren)} \Rightarrow$$

$$x^4 = 4x^3 \Rightarrow x^4 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (voldoet niet)} \vee x = 4.$$

$$x = 4 \Rightarrow f_2(4) = 2 \cdot \sqrt{4} - \ln(4) = 4 - \ln(4) \Rightarrow \text{buigpunt } (4, 4 - \ln(4)).$$



G20b $f_p(x) = p \cdot \sqrt{x} - \ln(x) \text{ (} x > 0 \text{ en } x > 0) \text{ ①} \Rightarrow f_p'(x) = p \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{p}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{x}$.

$$f_p'(x) = 0 \Rightarrow \frac{p}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{p}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow px = 2 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow p = \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ invullen in ①}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - \ln(x) = 2 - \ln(x) \Rightarrow \text{de toppen liggen op de grafiek van } y = 2 - \ln(x).$$

G21a $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

$g_p(x) = p\sqrt{x} \ (x \geq 0) \Rightarrow g_p'(x) = p \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{p}{2\sqrt{x}}$

Raken: $f(x) = g_p(x)$

$f'(x) = g_p'(x)$

$e^{-\frac{1}{2}x} = p\sqrt{x}$

$-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{p}{2\sqrt{x}}$

$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}} = p$ ①

$-e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sqrt{x} = p$ ② invullen in ①

$p = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}} = -e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = -\sqrt{x} \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$ (voldoet niet). Dus voor geen enkele p ($\sqrt{-1}$ bestaat niet).

G21b \perp Loodrecht snijden: $f(x) = g_p(x)$ \wedge $f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

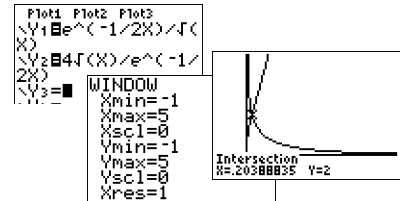
$e^{-\frac{1}{2}x} = p\sqrt{x}$

$-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \frac{p}{2\sqrt{x}} = -1$

$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}} = p$ ①

$p = \frac{4\sqrt{x}}{e^{-\frac{1}{2}x}}$ ② invullen in ①

$p = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}}{e^{-\frac{1}{2}x}}$ (intersect) $\Rightarrow (x \approx \dots \text{ en } p = 2$.



G22a $f_p(x) = pe^x \Rightarrow f_p'(x) = pe^x$

$g(x) = x \ln(x) \ (x > 0) \Rightarrow g'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

Raken: $f_p(x) = g(x)$

$f_p'(x) = g'(x)$

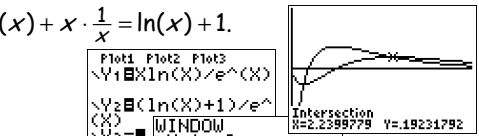
$pe^x = x \ln(x)$

$pe^x = \ln(x) + 1$

$p = \frac{x \ln(x)}{e^x}$ ①

$p = \frac{\ln(x) + 1}{e^x}$ ② invullen in ①

$p = \frac{x \ln(x)}{e^x} = \frac{\ln(x) + 1}{e^x}$ (intersect) $\Rightarrow (x \approx \dots \text{ en } p \approx -0,27 \vee p \approx 0,19$.



G22b \perp Loodrecht snijden: $f_p(x) = g(x)$ \wedge $f_p'(x) \cdot g'(x) = -1$

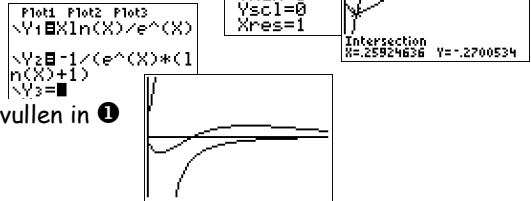
$pe^x = x \ln(x)$

$pe^x \cdot (\ln(x) + 1) = -1$

$p = \frac{x \ln(x)}{e^x}$ ①

$p = \frac{-1}{e^x \cdot (\ln(x) + 1)}$ ② invullen in ①

$p = \frac{x \ln(x)}{e^x} = \frac{-1}{e^x \cdot (\ln(x) + 1)}$ (intersect) \Rightarrow geen oplossingen voor p .

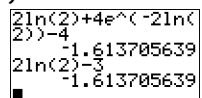


G23a $v(0) = 2 - 8e^0 = 2 - 8 = -6$ (m/s) en $v(2) = 2 - 8e^{-4}$ (m/s) $\Rightarrow a_{\text{gem}} = \frac{v(2) - v(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 8e^{-4} + 6}{2} \approx 3,93$ (m/s²).

G23b \perp Op het diepste punt is de snelheid gelijk aan 0 $\Rightarrow v(t) = 0$.

$2 - 8e^{-2t} = 0 \Rightarrow -8e^{-2t} = -2 \Rightarrow e^{-2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow -2t = \ln(\frac{1}{4}) \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2^2}) = -\frac{1}{2} \cdot -2 \ln(2) = \ln(2)$.

G23c $s = \int_0^{\ln(2)} v(t) dt = \int_0^{\ln(2)} (2 - 8e^{-2t}) dt = [2t + 4e^{-2t}]_0^{\ln(2)} = 2\ln(2) + 4e^{-2\ln(2)} - (0 + 4e^0) = 2\ln(2) + 4e^{\ln(2^{-2})} - 4$
 $= 2\ln(2) + 4 \cdot \frac{1}{4} - 4 = 2\ln(2) - 3 \approx -1,61$ (m). De bal komt maximaal 161 cm diep.



G24a $f(x) = -0,01x^3 + 0,1x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -0,03x^2 + 0,2x + 1$.

$f'(0) = 1 \Rightarrow$ de raaklijn in O is $y = x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -0,03x^2 + 0,2x + 1 = 0$ met $D = 0,2^2 - 4 \cdot -0,03 \cdot 1 = 0,04 + 0,12 = 0,16 \Rightarrow \sqrt{D} = 0,4$

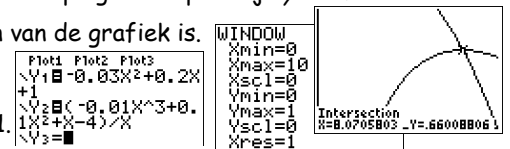
$x = \frac{-0,2 \pm 0,4}{2 \cdot -0,03} = \frac{0,2}{-0,06} = -\frac{20}{6} = -3\frac{1}{3} \vee x = \frac{-0,2 - 0,4}{2 \cdot -0,03} = \frac{-0,6}{-0,06} = \frac{60}{6} = 10$.

$f(10) = -0,01 \cdot 10^3 + 0,1 \cdot 10^2 + 10 = -10 + 10 + 10 = 10 \Rightarrow$ top (10, 10) en deze top ligt ook op de lijn $y = x$.

G24b \perp De lijn AP heft de grootste richtingscoëfficiënt als de lijn AP raaklijn van de grafiek is.

Dus $f'(x) = \frac{f(x) - 4}{x - 0}$

$-0,03x^2 + 0,2x + 1 = \frac{-0,01x^3 + 0,1x^2 + x - 4}{x}$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 8,1 \Rightarrow x_p \approx 8,1$.



G25a $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 3\sqrt{x}$ (kwadrateren) $\Rightarrow x^4 = 9x \Rightarrow x = 0 \vee x^3 = 9 \Rightarrow x = 0 \vee x = \sqrt[3]{9}$ (voldoen).

$O(V) = \int_0^{\sqrt[3]{9}} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\sqrt[3]{9}} (3\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^{\sqrt[3]{9}} (3 \cdot x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx$

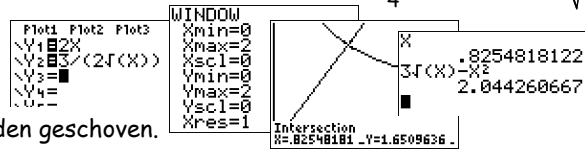
$= [2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt[3]{9}} = 2 \cdot (\sqrt[3]{9})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot (\sqrt[3]{9})^3 - (0 + 0) = 2 \cdot (3^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \cdot 9 = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} - 3 = 3$.

G25b $g(a) = 2 \cdot f(a) \Rightarrow 3\sqrt{a} = 2a^2$ (kwadrateren) $\Rightarrow 9a = 4a^4 \Rightarrow a = 0 \vee 4a^3 = 9 \Rightarrow a = 0 \vee a^3 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = 0 \vee a = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$.

Dus voor $a = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ (voor $a = 0$ is $A = B = C$).

G25c $f'(x) = g'(x) \Rightarrow 2x = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x}}$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 0,825...$

De grafiek moet $g(\text{Ans}) - f(\text{Ans}) \approx 2,04$ omhoog worden geschoven.



G26a $0,12 \cdot t \cdot e^{-0,5t} > 0,035$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 0,34... \vee t \approx 6,07...$

Het duurt 5,72.. uur, dit is 5 uur en 43 minuten.

G26b $C(t) = 0,12 \cdot t \cdot e^{-0,5t} \Rightarrow C'(t) = 0,12 \cdot 1 \cdot e^{-0,5t} + 0,12 \cdot t \cdot e^{-0,5t} \cdot -0,5$
 $= 0,12e^{-0,5t}(1 - 0,5t)$

G26c De sterkste afname als $C''(t) = 0$ (in het buigpunt).

$$C'(t) = 0,12 \cdot (1 - 0,5t) \cdot e^{-0,5t} = (0,12 - 0,06t) \cdot e^{-0,5t} \Rightarrow C''(t) = -0,06e^{-0,5t} + (0,12 - 0,06t) \cdot e^{-0,5t} \cdot -0,5$$

$$C''(t) = 0 \Rightarrow (-0,12 + 0,03t) \cdot e^{-0,5t} = 0 \text{ (e-macht is alleen positief)}$$

$$-0,12 + 0,03t = 0$$

$$0,03t = 0,12$$

$$t = \frac{0,12}{0,03} = \frac{12}{3} = 4. \text{ Dus 4 uur na het toedienen.}$$

G26d Het hoogste maximum binnen 24 uur is op het tijdsinterval [18, 24].

$$C^{***}(t) = C(t) + C(t-6) + C(t-12) + C(t-18)$$

$$= 0,12 \cdot t \cdot e^{-0,5t} + 0,12 \cdot (t-6) \cdot e^{-0,5(t-6)} + 0,12 \cdot (t-12) \cdot e^{-0,5(t-12)} + 0,12 \cdot (t-18) \cdot e^{-0,5(t-18)}$$

De optie maximum op [18, 24] geeft $C_{\max} \approx C(19,7) \approx 0,1087$ (mg/cm³).

De concentratie komt dus niet boven de 0,11 mg/cm³.

