1 Zijde AB is twee keer zo groot als zijde AD en zijde AC is twee keer zo groot als zijde AE.
Dus ΔABC is een vergroting van ΔADE met factor 2.

2a $\left.\begin{array}{l}\angle BAD = \angle EBC = 90^\circ \\ \angle ABD = \angle BEC \text{ (gegeven)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BEC$ (hh).

ΔABD	$AB = 8$	$AD = 15$	$BD = 17$
ΔBEC	$BE = ...$	$BC = ...$	$EC = 13\frac{3}{5}$

2b $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow BD^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow BD = 17.$
$BE = 8 \cdot 13\frac{3}{5} : 17 = 6{,}4$ en $AE = AB - EB = 8 - 6{,}4 = 1{,}6.$

```
8²+15²
                289
√(289)
                 17
```

```
8*(13+3/5)/17
                6.4
8-Ans
                1.6
```

3a $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle A = \angle A\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta ACB \text{ (hh)} \\ \left.\begin{array}{l}\angle BCA = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle B = \angle B\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACB \backsim \Delta CDB \text{ (hh)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta CDB.$

ΔADC	$AD = ...$	$AC = 15$	$DC = ...$
ΔACB	$AC = 15$	$AB = 17$	$CB = 8$
ΔCDB	$CD = ...$	$CB = 8$	$DB = ...$

3b $AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = 8^2 + 15^2 = 289 \Rightarrow AB = 17.$
$CD = 8 \cdot 15 : 17 = 7\frac{1}{17}$; $AD = 15 \cdot 15 : 17 = 13\frac{4}{17}$ en
$BD = 8 \cdot 8 : 17 = 3\frac{13}{17}$ of $BD = AB - AD = 17 - 13\frac{4}{17} = 3\frac{13}{17}.$

```
8²+15²
                289
√(289)
                 17
```

```
8*15/17
        7.058823529
Ans-7▸Frac
               1/17
```

```
15*15/17
        13.23529412
Ans-13▸Frac
               4/17
```

```
8*8/17
        3.764705882
Ans-3▸Frac
              13/17
17-(13+4/17)
        3.764705882
```

4 $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle B \\ \angle BED = \angle BAC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BED \backsim \Delta BAC$ (hh).
$BD^2 = DE^2 + BE^2 \Rightarrow BD^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BD = 13.$
$AC = 5 \cdot 20 : 12 = 8\frac{1}{3}$; $BC = 13 \cdot 20 : 12 = 21\frac{2}{3}$ en
$CE = BC - BE = 21\frac{2}{3} - 12 = 9\frac{2}{3}.$

ΔBED	$BE = 12$	$BD = 13$	$ED = 5$
ΔBAC	$BA = 20$	$BC = ...$	$AC = ...$

```
5²+12²
                169
√(169)
                 13
```

```
5*20/12
        8.333333333
Ans-8▸Frac
                1/3
```

```
13*20/12
        21.66666667
Ans-21▸Frac
                2/3
```

5 $\left.\begin{array}{l}\angle PQD = \angle BQC \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle ADB = \angle DBC \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta QDP \backsim \Delta QBC$ (hh).
$PC^2 = PD^2 + DC^2 \Rightarrow PC^2 = 7^2 + 24^2 = 625 \Rightarrow PC = 25.$
$QP = 25 \cdot 7 : 17 = 10\frac{5}{17}.$

```
7²+24²
                625
√(625)
                 25
```

```
25*7/17
        10.29411765
Ans-10▸Frac
               5/17
```

ΔQDP	$QD = ...$	$QP = ...$	$DP = 7$
ΔQBC	$QB = ...$	$QC = ...$	$BC = 10$
samen	$BD = ...$	$PC = 25$	17

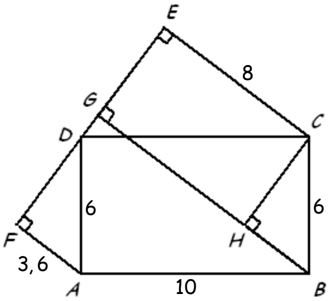
6a $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle FAD + \angle ADF = 90^\circ \\ \angle CDE + \angle ADF = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle FAD = \angle CDE \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \angle F = \angle E = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AFD \backsim \Delta DEC$ (hh).

ΔAFD	$AF = ...$	$AD = 6$	$FD = ...$
ΔDEC	$DE = 6$	$DC = 10$	$EC = 8$

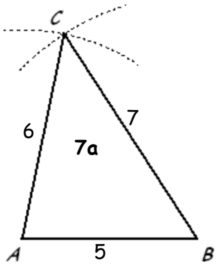
$DE^2 = DC^2 - EC^2 \Rightarrow DE^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow DE = 6.$
$AF = 6 \cdot 6 : 10 = 3{,}6$

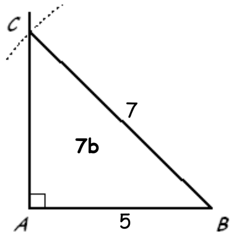
```
10²-8²
                 36
√(36)
                  6
6*6/10
                3.6
```

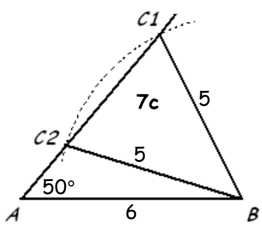
6b Teken $CH \perp BG$.
$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AF \,//\, BH \text{ (beide loodrecht op } FE) \\ AD \,//\, BC \text{ (}ABCD\text{ is een rechthoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle FAD = \angle HBC \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \angle AFD = \angle BHC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AFD \backsim \Delta BHC$ (hh).
Omdat $AD = BC = 6$ is dan ook $BH = AF = 3{,}6$.
$HG = CE = 8$. Dus $BG = BH + HG = 3{,}6 + 8 = 11{,}6$.

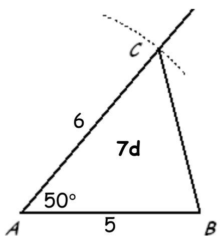


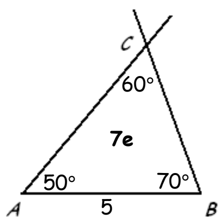
7a Eén driehoek.
7b Eén driehoek.
7c Twee driehoeken.
7d Eén driehoek.
7e Eén driehoek.
7f Eén driehoek.
7g Meer driehoeken.



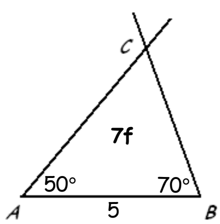


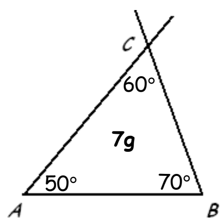


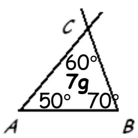




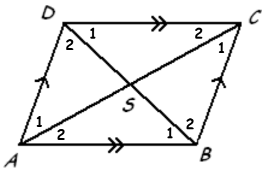
$\angle A = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$







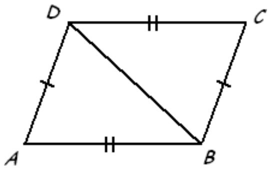
8 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB \mathbin{/\!/} CD$ en $AD \mathbin{/\!/} BC$. (zie de figuur hiernaast)



$$\left.\begin{array}{l}\angle A_2 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle B_1 = \angle D_1 \text{ (Z-hoeken)}\\ AB = CD \text{ (voorbeeld blz. 121)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta CDS \text{ (HZH)} \Rightarrow AS = CS \text{ en } BS = DS.$$

Dus de diagonalen AC en BD delen elkaar middendoor.

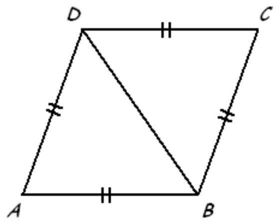
9 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB = CD$ en $AD = BC$. (zie hiernaast)



Teken diagonaal BD.

$$\left.\begin{array}{l}AB = CD\\ AD = BC\\ BD = BD\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CDB \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle A = \angle C.$$

10a Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB = BC = CD = AD$. (zie hiernaast)



Teken diagonaal BD.

$$\left.\begin{array}{l}AB = CD\\ AD = BC\\ BD = BD\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CDB \text{ (ZZZ)}.$$

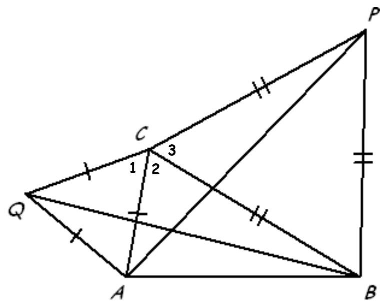
Dus $\angle ABD = \angle CDB$, zodat $AB \mathbin{/\!/} CD$ (Z-hoeken).
Ook $\angle ADB = \angle CBD$, zodat $AD \mathbin{/\!/} BC$ (Z-hoeken).

10b
$$\left.\begin{array}{l}DA = DC\\ BA = BC\\ BD = BD\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta DAB \cong \Delta DCB \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle ABD = \angle CBD \text{ en } \angle ADB = \angle CDB.$$

Geheel analoog toon je aan dat de andere diagonaal ook de hoeken middendoor deelt.

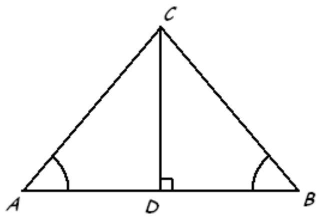
11 Teken de stralen MA en MB.

$$\left.\begin{array}{l}MA = MB \text{ (straal cirkel)}\\ MN = MN\\ \angle ANM = \angle BNM = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MNA \cong \Delta MNB \text{ (ZZR)} \Rightarrow AN = BN.$$



12
$$\left.\begin{array}{l}\angle C_{12} = \angle C_{23} = 60^\circ + \angle C_2\\ AC = QC\\ PC = BC\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACP \cong \Delta QCB \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AP = QB.$$

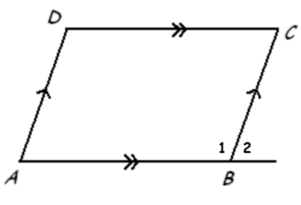
13 Gegeven: $\Delta ABCD$ met $\angle A = \angle B$. Teken $CD \perp AB$. (zie de figuur hiernaast)

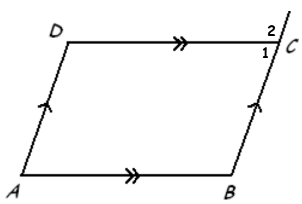


$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle B \text{ (gegeven)}\\ \angle ADC = BDC = 90^\circ\\ CD = CD\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta BDC \text{ (HZH)} \Rightarrow AC = BC.$$

14
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\\ \angle A_3 + \angle A_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A_3 + \angle A_2 \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_3.$$

15 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB \mathbin{/\!/} CD$ en $AD \mathbin{/\!/} BC$.





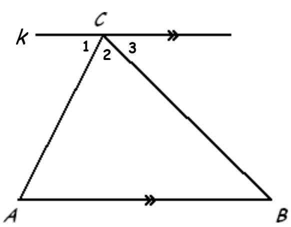
Te bewijzen: $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$.
Bewijs: Verleng zijde AB (aan de kant van B).

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle B_2 \text{ (F-hoeken)}\\ \angle C = \angle B_2 \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle C.$$

Verleng zijde BC (aan de kant van C).

$$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle C_2 \text{ (F-hoeken)}\\ \angle D = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B = \angle D.$$

16 Gegeven: Driehoek ABC.



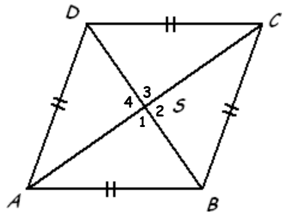
Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.
Bewijs: Teken lijn k door C evenwijdig aan AB. (dan $\angle C_2 = \angle C$)

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle B = \angle C_3 \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C_2 = 180^\circ.$$

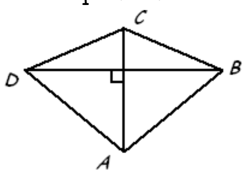
Dus in driehoek ABC geldt: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

17 Gegeven: Driehoek ABC. (zie figuur 8.13)
Te bewijzen: $\angle B_2 = \angle A + \angle C$.
Bewijs:
$$\left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\\ \angle A + \angle C + \angle B_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_1 + \angle B_2 = \angle A + \angle C + \angle B_1 \Rightarrow \angle B_2 = \angle A + \angle C.$$

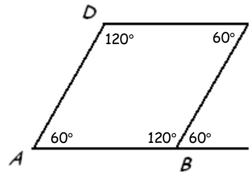
18a In opgave 10a. 18b In opgave 8.



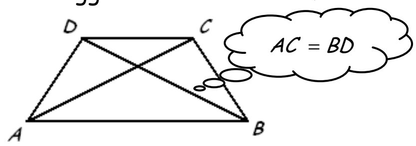
18c Gegeven: ruit $ABCD$ met snijpunt S van de diagonalen. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $\angle S_1 = 90^\circ$.
Bewijs: $ABCD$ is een ruit $\Rightarrow$ $ABCD$ is een par(allellogra)m (zie opg. 10a) $\Rightarrow BS = DS$ (zie opg. 8).
$$\left.\begin{array}{l}AS = AS\\ BS = DS \text{ (opgave 8)}\\ AD = AB \text{ (}ABCD\text{ is een ruit)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADS \cong \Delta ABS \text{ (ZZZ).}$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{Dus } \angle S_1 = \angle S_4\\ \angle S_1 + \angle S_4 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle S_1 + \angle S_1 = 180^\circ \Rightarrow \angle S_1 = 90^\circ.$$



19 Neem als tegenvoorbeeld vlieger $ABCD$ hiernaast.
Er geldt $AC \perp BD$, maar vierhoek $ABCD$ is geen ruit.



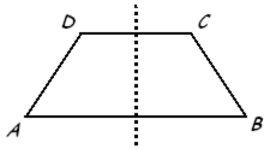
20 Neem als tegenvoorbeeld parallellogram $ABCD$ met $\angle A = 60^\circ$. (zie hiernaast)
Uit de eigenschappen van een parallellogram volgt dan $\angle A = 60^\circ$ en $\angle B = \angle D = 120^\circ$.
De buitenhoek van B is dan 60° en $\frac{\angle A + \angle C + \angle D}{3} = \frac{60^\circ + 60^\circ + 120^\circ}{3} = \frac{240^\circ}{3} = 80^\circ$.
Dus de buitenhoek van B is niet gelijk aan het derde deel van de niet-aanliggende binnenhoeken.



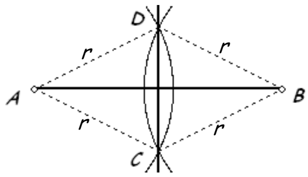
21a De stelling is niet omkeerbaar. Zie het tegenvoorbeeld hiernaast.

21b De stelling is omkeerbaar:
Als de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen,
dan is de vierhoek een parallellogram.

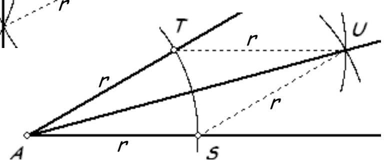
21c De stelling is omkeerbaar:
Als in ΔABC geldt $BC^2 = AB^2 + AC^2$, dan is de driehoek rechthoekig in A.



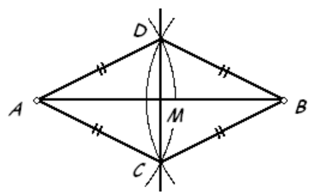
21d De stelling is niet omkeerbaar. Zie het tegenvoorbeeld hiernaast.



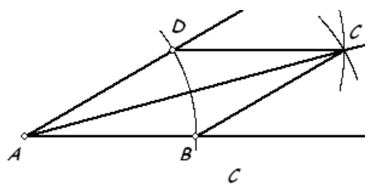
22 De cirkelbogen met middelpunten A en B hebben gelijke straal.
Dus $AC = CB = BD = DA = r \Rightarrow$ vierhoek $ACBD$ is een ruit.
Dus CD en AB delen elkaar loodrecht ($CD \perp AB$) middendoor.



23 De cirkelbogen met middelpunten A, S en T hebben gelijke straal.
Dus $AS = AT = SU = TU = r \Rightarrow$ vierhoek $ASUT$ is een ruit.
Dioagonaal AU deelt $\angle A$ middendoor $\Rightarrow AU$ is bissectrice (hoekdeellijn) van $\angle A$.

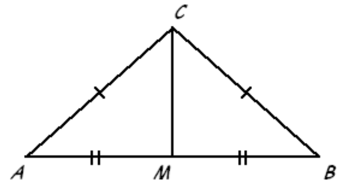


24a Gegeven: Vierhoek $ACBD$ met $AC = BC = BD = AD$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: CD is de middelloodlijn van AB.
Bewijs: Zij M het snijpunt van AB en CD.
$AC = BC = BD = AD \Rightarrow ACBD$ is een ruit en dus ook een parallellogram.
$$\left.\begin{array}{l}AM = BM \text{ (parallellogram)}\\ CD \perp AB \text{ (ruit)}\end{array}\right\} \Rightarrow CD \text{ is middelloodlijn van } AB.$$



24b Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB = BC = CD = AD$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: AC is bissectrice van $\angle A$.
Bewijs: $AB = BC = CD = AD \Rightarrow ACBD$ is een ruit.
AC is een diagonaal van ruit $ABCD$.
Dus AC deelt $\angle A$ middendoor $\Rightarrow AC$ is bissectrice van $\angle A$.

25a Gegeven: Lijnstuk AB en punt C met $AC = BC$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: C ligt op de middelloodlijn van AB.
Bewijs: Zij M het midden van AB.
(als $C = M$ dan zijn we klaar want de middelloodlijn van AB gaat door het midden van AB)

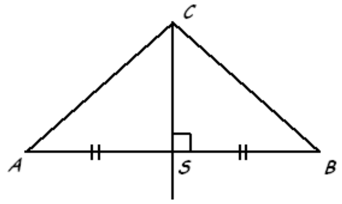


$\left.\begin{array}{l} AM = BM \\ AC = BC \text{ (gegeven)} \\ CM = CM \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMC \cong \Delta BMC \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \angle AMC = \angle BMC \\ \angle AMC + \angle BMC = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle AMC = \angle BMC = 90^\circ$

Dus C op de middelloodlijn van AB.

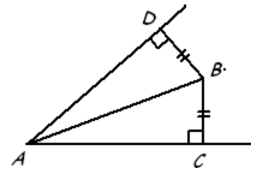
25b Gegeven: C ligt op de middelloodlijn van AB. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $AC = BC$.
Bewijs: Zij S het snijpunt van AB en de middenloodlijn van AB.
(als $C = S$ dan zijn we klaar want S is het midden van AB)

$\left.\begin{array}{l} AS = BS \\ CS = CS \\ \angle ASC = \angle BSC = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ASC \cong \Delta BSC \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AC = BC.$



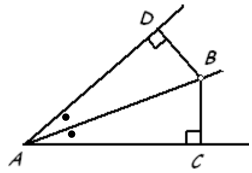
26a Gegeven: Punt B met gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: B ligt op de bissectrice van $\angle A$.
Bewijs: Teken AB en de loodlijnstukken BC en BD.
(de kortste afstand tot de overkant van een weg staat haaks op de trottoirband aan de overkant)

$\left.\begin{array}{l} BC = BD \text{ (gegeven)} \\ AB = AB \\ \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABD \text{ (ZZR)} \Rightarrow \angle BAC = \angle BAD \Rightarrow B$ ligt op de bissectrice van $\angle A$.



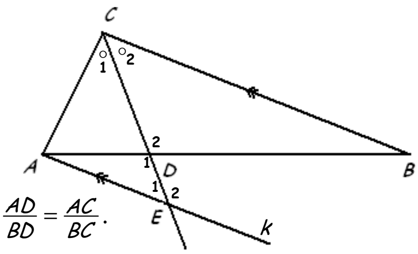
26b Gegeven: $\angle A$ en punt B op de bissectrice van $\angle A$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: B heeft gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$.
Bewijs: Teken de loodlijnstukken BC en BD.

$\left.\begin{array}{l} \angle BAC = \angle BAD \text{ (gegeven)} \\ AB = AB \\ \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABD \text{ (ZHH)} \Rightarrow BC = BD \Rightarrow B$ heeft gelijke afstanden tot de benen van $\angle A$.



27 Gegeven: Driehoek ABC met bissectrice CD. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $AD : BD = AC : BC$.
Bewijs: Teken door A een hulplijn $k \parallel BC$. (k snijdt CD in E)

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle E_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D_1 = D_2 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EDA \sim \Delta CDB \text{ (hh)} \Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{BC} \\ \left.\begin{array}{l} \angle E_1 = \angle C_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle C_1 = C_2 \text{ (bissectrice)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1 \Rightarrow \Delta EAC \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AE = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}.$



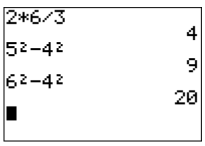
28a Zie figuur 8.19: $\angle BAS = \frac{1}{2}\angle A = 30^\circ$ en $\cos 30^\circ = \frac{5}{AS} \Rightarrow AS = \frac{5}{\cos 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{5}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 3\frac{1}{3}\sqrt{3}.$

28b In ΔASC: $\cos\angle SAC = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\frac{AS}{AC} = \frac{3\frac{1}{3}\sqrt{3}}{7} \neq \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \angle ASC \neq 90^\circ.$

29 Zie figuur 8.20: $\left.\begin{array}{r} \angle BFE = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle B = \angle B \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FBE \sim \Delta DBC \text{ (hh)} \Rightarrow DC = 2 \cdot 6 : 3 = 4.$

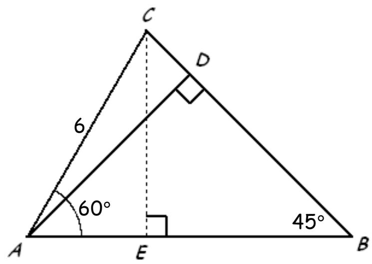
ΔFBE	$FB = ...$	$FE = 2$	$BE = 3$
ΔDBC	$DB = ...$	$DC = ...$	$BC = 6$

$AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow AD^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow AD = \sqrt{9} = 3.$
$BC^2 = DB^2 + DC^2 \Rightarrow DB^2 = 6^2 - 4^2 = 20 \Rightarrow DB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$
$AB = AD + DB = 3 + 2\sqrt{5}.$

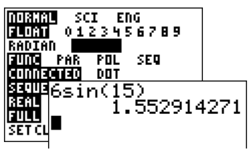


30a Teken de hoogtelijn CE. (zie de figuur hiernaast)

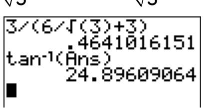
$\left.\begin{array}{l} \Delta AEC\text{: } AE = \frac{1}{2}AC = 3 \text{ en } CE = AE \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ \Delta BEC\text{: } BE = CE = 3\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = AE + EB = 3 + 3\sqrt{3}.$

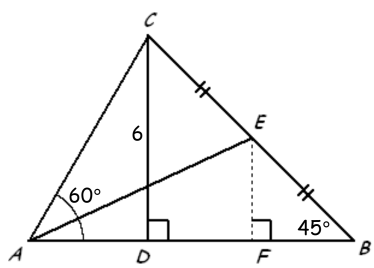


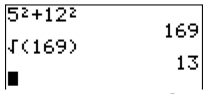
30b ΔABD: $\angle BAD = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$.
Dus $\angle CAD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.
ΔADC: $\sin 15^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{6} \Rightarrow CD = 6 \cdot \sin 15^\circ \approx 1{,}55.$



31 ΔBDC: $\angle DCB = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ \Rightarrow$ Dus $DB = DC = 6$. (teken $EF \perp AB$)
ΔBDC is een vergroting van ΔBFE met factor $2 \Rightarrow BF = FE = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$
ΔADC: $AD = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow AF = AB - FB = AD + DB - FB = \frac{6}{\sqrt{3}} + 6 - 3 = \frac{6}{\sqrt{3}} + 3.$
ΔAFE: $\tan\angle EAF = \frac{FE}{AF} = \frac{3}{\frac{6}{\sqrt{3}} + 3} \Rightarrow \angle EAF = \angle EAB \approx 25^\circ.$



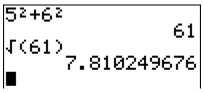




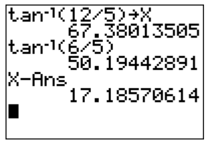
32 Gebruik figuur 8.23. $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AB = 13$.

ΔBAC is een vergroting van ΔBED met factor 2 ($\angle BDE = \angle BCA$ én $\angle B = \angle B \Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta BEC$ (hh)) $\Rightarrow EB = \frac{1}{2}AB = 6\frac{1}{2}$.

$AE = AB - EB = 13 - 6\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$.



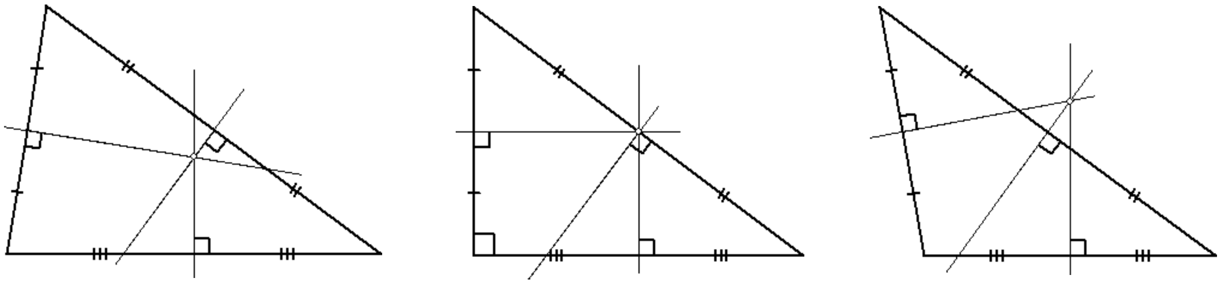
$AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow AD^2 = 5^2 + 6^2 = 61 \Rightarrow AD = \sqrt{61}$.



$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC \approx 17°$ (zie de berekening hieronder).

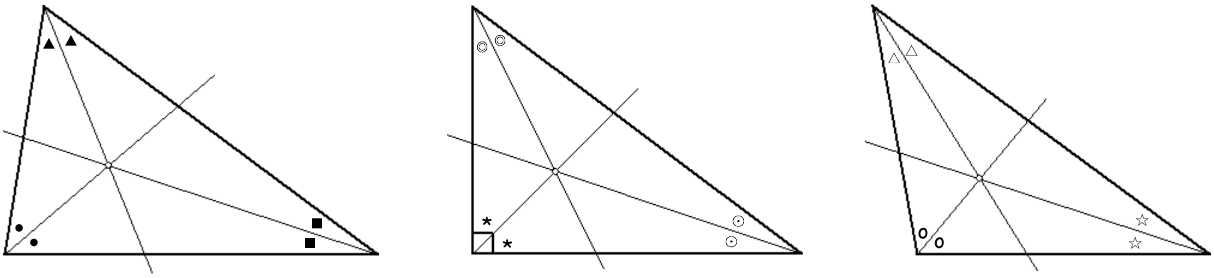
ΔBAC: $\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5} \Rightarrow \angle BAC \approx 67°$ en in ΔDAC: $\tan\angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{6}{5} \Rightarrow \angle DAC \approx 50°$.

33a



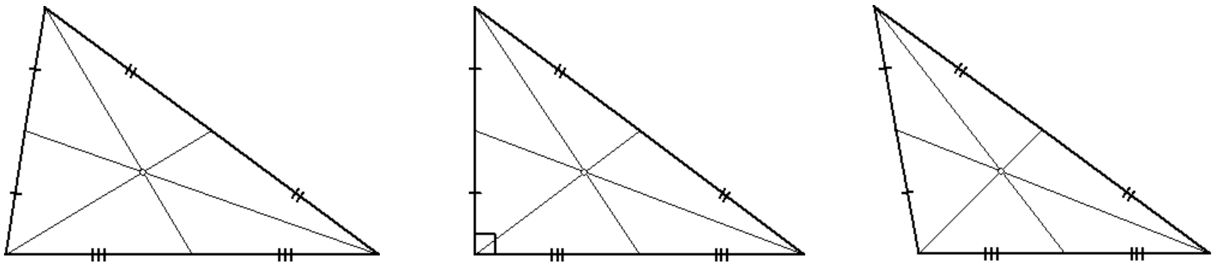
Vermoeden: De drie middelloodlijnen gaan door één punt.

33b



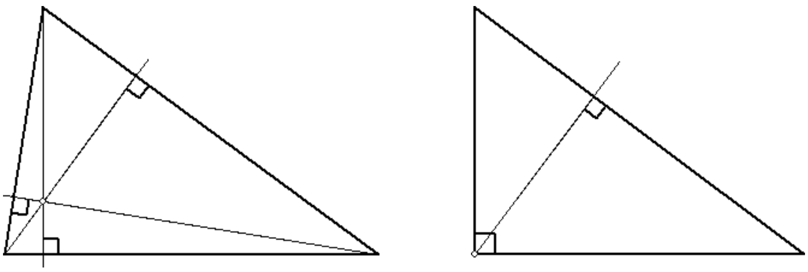
Vermoeden: De drie bissectrices gaan door één punt.

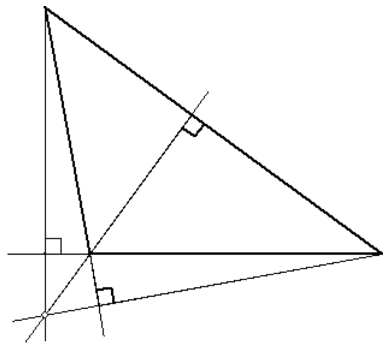
33c



Vermoeden: De drie zwaartelijnen gaan door één punt.

33d





Vermoeden: De drie hoogtelijnen gaan door één punt.

34a Vermoeden: De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt.

34b Vermoeden: De cirkel gaat ook door de andere hoekpunten van de driehoek.

35a Vermoeden: De drie zwaartelijnen in een driehoek gaan door één punt.

35b Vermoeden: De drie hoogtelijnen in een driehoek gaan door één punt.

36a Vermoeden: De drie bissectrices in een driehoek gaan door één punt.

36b Vermoeden: De cirkel raakt ook de andere zijden van de driehoek.

37a Vermoeden: De bissectrice van $\angle A$ en de beide buitenbissectrices van de hoeken B en C gaan door één punt.

37b Vermoeden: De cirkel raakt ook de lijnen AB en AC.

38 Vermoeden: De raaklijn aan een cirkel en de straal naar het raakpunt staan loodrecht op elkaar.

39 De cirkel door E, F en G gaat ook door H.

40 Vermoeden: De lijnen CF en DE lopen evenwijdig.

41 Vermoeden: $\angle ACB = 90°$.

42 Vermoeden: $\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$.

43 Vermoeden: Het punt C ligt op de cirkel als $\angle A + \angle C = 180°$.

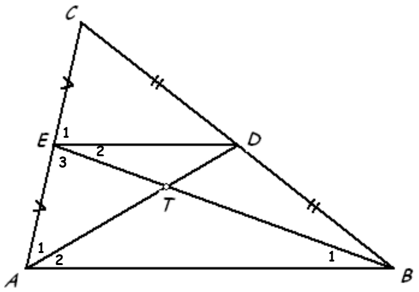
44 Vermoeden: De drie cirkels gaan door één punt.

45 Vermoeden: Vierhoek $PQRS$ is een parallellogram.

46 Vermoeden: De punten A, B en C liggen op één lijn.

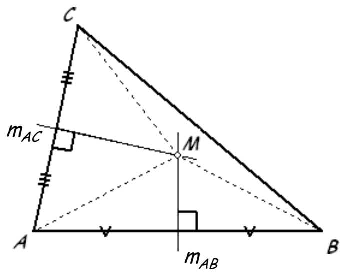
47a $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A = B \\ B = C \end{array}\right\} \Rightarrow A = C \\ \qquad\qquad C = D \end{array}\right\} \Rightarrow A = D.$

47b $\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C = 180° \\ \angle A + \angle D = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle D \Rightarrow \angle B + \angle C = \angle D.$



48a AD en BE snijden elkaar in T.
$\left.\begin{array}{l} AC : EC = 2:1 \\ BC : DC = 2:1 \\ \angle C = \angle C \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta EDC$ (zhz) $\Rightarrow AB : ED = 2:1.$
Uit de gelijkvormigheid volgt ook $\angle A_{12} = \angle E_1 \Rightarrow AB \,/\!/\, ED$ (F-hoeken).
$\left.\begin{array}{l} \angle B_1 = \angle E_2 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle ATB = \angle DTE \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABT \backsim \Delta DET$ (hh).
Ook geldt er $AB : DE = 2:1$ dus $BT : ET = 2:1$ en $AT : DT = 2:1$.

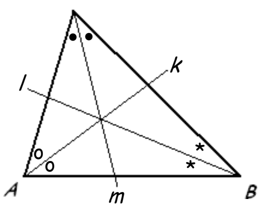
48b In de eerste figuur (voorbeeld blz. 137) is $\Delta ACS \backsim \Delta DFS$ en $AC : DF = 2:1 \Rightarrow AS : DS = 2:1$ en $CS : FS = 2:1$.
In de tweede figuur is $\Delta ABT \backsim \Delta DET$ en $AB : DE = 2:1 \Rightarrow AT : DT = 2:1$ en $BT : ET = 2:1$ (zie 48b).
De punten S en T vallen samen $\Rightarrow$ de drie zwaartelijnen verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als $2:1$.

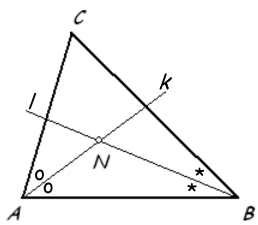


49a Gegeven: ΔABC en de middelloodlijnen m_{AB}, m_{AC} en m_{BC}. (zie figuur 8.30)
Te bewijzen: m_{AB}, m_{AC} en m_{BC} gaan door één punt.

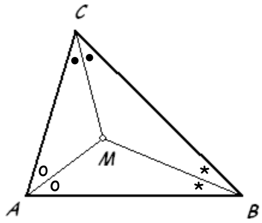
49b Bewijs: Zij M het snijpunt van m_{AB} en m_{AC}. (zie de figuur hiernaast)
$\left.\begin{array}{l} M \text{ op } m_{AB} \Rightarrow AM = BM \\ M \text{ op } m_{AC} \Rightarrow AM = CM \end{array}\right\} \Rightarrow BM = CM \Rightarrow M \text{ op } m_{BC}.$
Hiermee is bewezen dat de drie middelloodlijnen door één punt gaan.

50 Gegeven: ΔABC en het snijpunt M de middelloodlijnen van de zijden. (zie de figuur hierboven)
Te bewijzen: M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔABC, ofwel $MA = MB = MC$.
Bewijs: $\left.\begin{array}{l} M \text{ op } m_{AB} \Rightarrow AM = BM \\ M \text{ op } m_{AC} \Rightarrow AM = CM \end{array}\right\} \Rightarrow AM = BM = CM.$
Dus M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔABC.

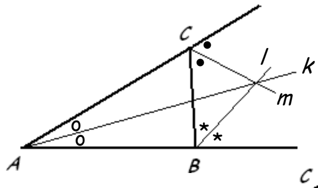




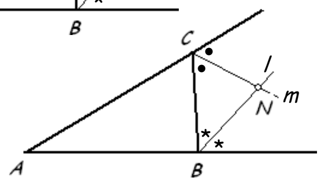
51 Gegeven: ΔABC met de bissectrices k, l en m. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: De bissectrices k, l en m gaan door één punt.
Bewijs: Zij N het snijpunt van k en l. (zie de tweede figuur hiernaast)
$\left.\begin{array}{l} N \text{ op } k \Rightarrow \text{d}(N, AB) = \text{d}(N, AC) \\ N \text{ op } l \Rightarrow \text{d}(N, AB) = \text{d}(N, BC) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{d}(N, AC) = \text{d}(N, BC).$
Dus N ligt op de bissectrice m van $\Delta ABC \Rightarrow$ de drie bissectrices gaan door één punt.



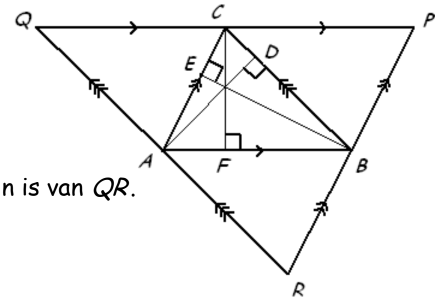
52 Gegeven: ΔABC met het snijpunt M van de drie bissectrices. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van ΔABC,
ofwel $\text{d}(M,\, AB) = \text{d}(M,\, AC) = \text{d}(M,\, BC)$.
Bewijs:
$$\left.\begin{aligned} &M \text{ op de bissectrice van } \angle A \Rightarrow \text{d}(M,\, AB) = \text{d}(M,\, AC) \\ &M \text{ op de bissectrice van } \angle B \Rightarrow \text{d}(M,\, AB) = \text{d}(M,\, BC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{d}(M,\, AB) = \text{d}(M,\, AC) = \text{d}(M,\, BC).$$
Dus M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van ΔABC.



53 Gegeven: ΔABC met de bissectrices k van $\angle A$, en de buitenbissectrices l en m van de hoeken B en C. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: De lijnen k, l en m gaan door één punt.
Bewijs: Zij N het snijpunt van l en m. (zie de figuur hiernaast)
$$\left.\begin{aligned} &N \text{ op } l \Rightarrow \text{d}(N,\, AB) = \text{d}(N,\, BC) \\ &N \text{ op } m \Rightarrow \text{d}(N,\, BC) = \text{d}(N,\, AC) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{d}(N,\, AB) = \text{d}(N,\, AC).$$
Dus N ligt ook op de bissectrice van $\angle A \Rightarrow$ de drie lijnen door één punt.

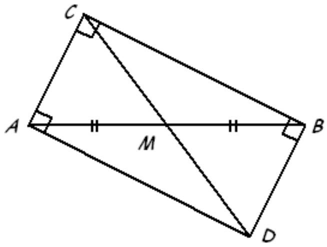


54a Zie de figuur hiernaast.



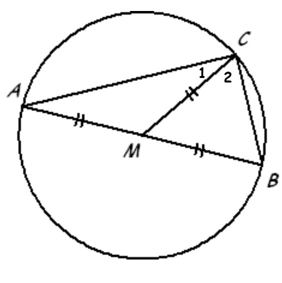
54b
$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} CF &\perp AB \\ PQ &\,/\!/\, AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow CF \perp PQ \\ &\left.\begin{aligned} CQ &= AB \\ CP &= AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow CQ = CP \end{aligned}\right\} \Rightarrow CF \text{ is middelloodlijn van } PQ.$$
Analoog toon je aan dat BE middelloodlijn is van PR en dat AD middelloodlijn is van QR.
De hoogtelijnen van ΔABC zijn dus de middelloodlijnen van ΔPQR.
De middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt (bewezen in 49b).
Dus de hoogtelijnen van ΔABC gaan door één punt.

55a Gegeven: ΔABC met $\angle C = 90°$ en M het midden van AB. (zie de figuur 8.32)
Te bewijzen: $AM = BM = CM$.
Bewijs: Teken eerst rechthoek $ADBC$ en de diagonalen AB en CD. (zie hiernaast)
Het snijpunt van de diagonalen is M, want $AM = BM$. ($ADBC$ is ook een parallellogram)

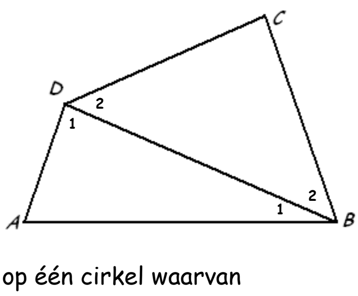


$$\left.\begin{aligned} &AB = CD \ (ADBC \text{ is een rechthoek}) \\ &CM = MD = \tfrac{1}{2}CD \ (ADBC \text{ is een parallellogram}) \\ &AM = BM = \tfrac{1}{2}AB \ (\text{gegeven}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM = BM = CM \ (= DM).$$

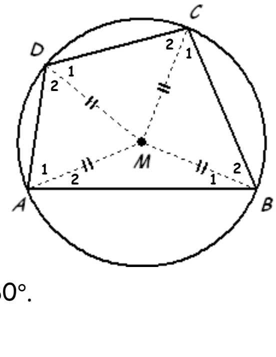
55b Gegeven: ΔABC, zijde AB is middellijn van de cirkel met middelpunt M en C ligt op de cirkel. (zie de figuur hieronder)
Te bewijzen: $\angle C_{12} = 90°$.
Bewijs:
$$\left.\begin{aligned} &\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180° \ (\text{hoekensom driehoek}) \\ &AM = CM \Rightarrow \angle A = \angle C_1 \ (\text{gelijkbenige driehoek}) \\ &BM = CM \Rightarrow \angle B = \angle C_2 \ (\text{gelijkbenige driehoek}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180° \\ &2 \cdot \angle C_{12} = 180° \Rightarrow \angle C_{12} = 90°. \end{aligned}$$



56 Gegeven: Vierhoek $ABCD$. (zie figuur 8.34)
Te bewijzen: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.
Bewijs: Teken diagonaal BD. (zie de figuur hiernaast)
$$\left.\begin{aligned} &\angle A + \angle B_1 + \angle D_1 = 180° \ (\text{hoekensom driehoek}) \\ &\angle B_2 + \angle C + \angle D_2 = 180° \ (\text{hoekensom driehoek}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$\angle A + \angle B_1 + \angle D_1 + \angle B_2 + \angle C + \angle D_2 = 360°$.
Dus $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

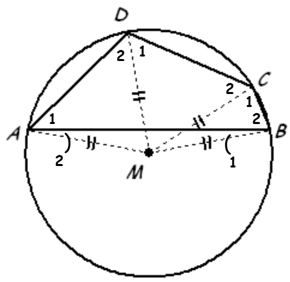


57a Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de vier hoekpunten op één cirkel waarvan het middelpunt M binnen de vierhoek ligt. (zie figuur 8.35)
Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$.
Bewijs: Teken hiervoor de lijnstukken MA, MB, MC en MD. (zie de figuur hiernaast)



$$\left.\begin{aligned} &\text{In } \Delta ABM\text{: } \angle A_2 = \angle B_1 \ (\text{gelijkbenige driehoek}) \\ &\text{In } \Delta BCM\text{: } \angle C_1 = \angle B_2 \ (\text{gelijkbenige driehoek}) \\ &\text{In } \Delta CDM\text{: } \angle C_2 = \angle D_1 \ (\text{gelijkbenige driehoek}) \\ &\text{In } \Delta DAM\text{: } \angle A_1 = \angle D_2 \ (\text{gelijkbenige driehoek}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2$
$$\left.\begin{aligned} &\text{ofwel } \angle A + \angle C = \angle B + \angle D \\ &\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360° \ (\text{hoekensom vierhoek}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle C = 180° \text{ en } \angle B + \angle D = 180°.$$

57b Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de vier hoekpunten op één cirkel waarvan het middelpunt M buiten de vierhoek ligt. (zie figuur 8.36)
Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$.
Bewijs: Teken de lijnstukken MA, MB, MC en MD. (zie de figuur hiernaast)



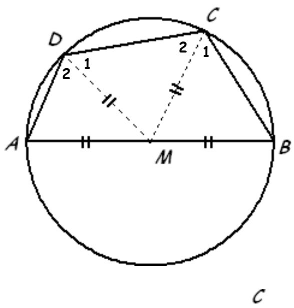
$$\left.\begin{array}{l}\text{In } \Delta ABM\text{: } \angle A_2 = \angle B_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\\ \text{In } \Delta BCM\text{: } \angle C_1 = \angle B_{12} \text{ (gelijkbenige driehoek)}\\ \text{In } \Delta CDM\text{: } \angle C_2 = \angle D_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\\ \text{In } \Delta DAM\text{: } \angle A_{12} = \angle D_2 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\angle A_{12} - \angle A_2 + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle B_{12} + \angle D_1 + \angle D_2 - \angle B_1$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ofwel } \angle A_1 + \angle C_{12} = \angle B_2 + \angle D_{12}\\ \angle A_1 + \angle B_2 + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360° \text{ (hoekensom vierhoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A_1 + \angle C_{12} = 180° \text{ en } \angle B_2 + \angle D_{12} = 180°$$

Dus $\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$.

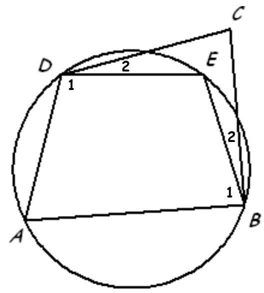
57c Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de vier hoekpunten op één cirkel waarvan het middelpunt M op AB ligt. (zie figuur 8.37)
Te bewijzen: $\angle A + \angle C = 180°$ en $\angle B + \angle D = 180°$.
Bewijs: Teken de lijnstukken MC en MD. (zie de figuur hiernaast)



$$\left.\begin{array}{l}\text{In } \Delta ADM\text{: } \angle A = \angle D_2 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\\ \text{In } \Delta BCM\text{: } \angle C_1 = \angle B \text{ (gelijkbenige driehoek)}\\ \text{In } \Delta CDM\text{: } \angle C_2 = \angle D_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A + \angle C_1 + \angle C_2 = \angle D_2 + \angle B + \angle D_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ofwel } \angle A + \angle C = \angle B + \angle D\\ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360° \text{ (hoekensom vierhoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A + \angle C = 180° \text{ en } \angle B + \angle D = 180°.$$

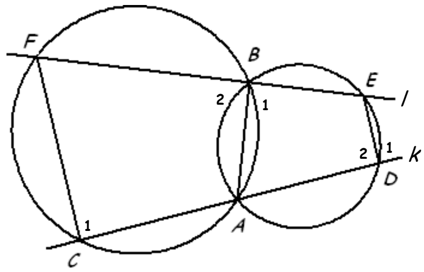
58 Gegeven: De cirkel door A, B en D en een punt C buiten de cirkel. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $\angle A + \angle C < 180°$.
Bewijs: Kies een punt E op de cirkel binnen vierhoek $ABCD$ en teken BE en DE.



$\angle B_1 + \angle D_1 = 180°$ ($ABED$ is een koordenvierhoek)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dus } \angle B_{12} + \angle D_{12} > 180°\\ \angle A + \angle B_{12} + \angle C + \angle D_{12} = 360° \text{ (hoekensom vierhoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A + \angle C < 180°.$$

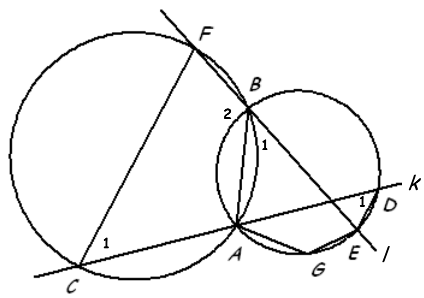
59 Gegeven: Twee cirkels die elkaar snijden in A en B.
De lijn k door A snijdt de cirkels ook nog in C en D.
De lijn l door B snijdt de cirkels ook nog in E en F. (zie hiernaast)
Te bewijzen: $CF \,//\, DE$.
Bewijs: Trek CF, AB en DE. (zie de figuur hiernaast)



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle C_1 + \angle B_2 = 180° \text{ (}CABF\text{ is een koordenvierhoek)}\\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180° \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle C_1 = \angle B_1\\ \left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle D_2 = 180° \text{ (}ADEB\text{ is een koordenvierhoek)}\\ \angle D_1 + \angle D_2 = 180° \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1\end{array}\right\}\Rightarrow \angle C_1 = \angle D_1.$$

Dus $CF \,//\, DE$. (F-hoeken)

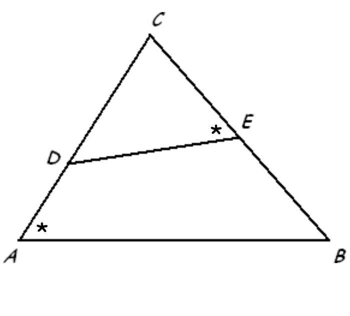
60 Vermoeden: Ook in deze situatie is $CF \,//\, DE$.
Gegeven: Twee cirkels die elkaar snijden in A en B.
De lijn k door A snijdt de cirkels ook nog in C en D.
De lijn l door B snijdt de cirkels ook nog in E en F,
waarbij E tussen A en D ligt. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $CF \,//\, DE$.
Bewijs: Teken G op de kleinste boog AE. Teken CF, AB, DE, AG en EG.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle C_1 + \angle B_2 = 180° \text{ (}CABF\text{ is een koordenvierhoek)}\\ \angle B_1 + \angle B_2 = 180° \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle C_1 = \angle B_1\\ \left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle G = 180° \text{ (}AGEB\text{ is een koordenvierhoek)}\\ \angle D_1 + \angle G = 180° \text{ (}AGED\text{ is een koordenvierhoek)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1\end{array}\right\}\Rightarrow \angle C_1 = \angle D_1.$$

Dus $CF \,//\, DE$. (Z-hoeken)

61a Gegeven: Driehoek ABC met DE antiparallel met zijde AB. (zie hiernaast)
Te bewijzen: $ABED$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l}\angle CED + \angle BED = 180° \text{ (gestrekte hoek)}\\ \angle CED = \angle A \text{ (gegeven)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle BED + \angle A = 180°.$$

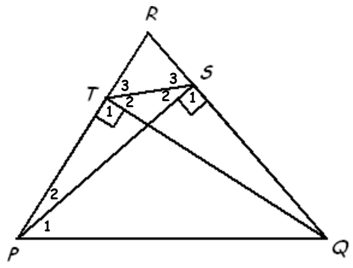
Dus $ABED$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).

61b Gegeven: Driehoek PQR met de hoogtelijnen PS en QT.
Te bewijzen: ST is antiparallel met PQ, ofwel $\angle TPQ = \angle RST$.
Bewijs: Teken ST.

$$\left.\begin{array}{l}\angle S_1 = 90^\circ \Rightarrow S \text{ op cirkel met middellijn } PQ \text{ (Thales)}\\ \angle T_1 = 90^\circ \Rightarrow T \text{ op cirkel met middellijn } PQ \text{ (Thales)}\end{array}\right\} \Rightarrow PQST \text{ is koordenvierhoek.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_{12} + \angle S_{12} = 180^\circ \text{ (}PQST\text{ is koordenvierhoek)}\\ \angle S_{123} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_{12} = \angle S_3 \ (\angle TPQ = \angle RST).$$

Dus ST is antiparallel met PQ.



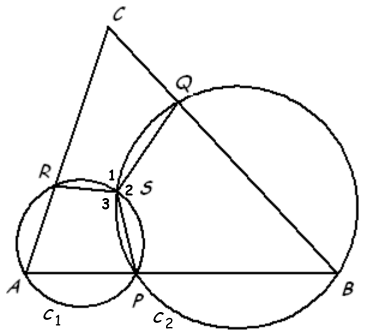
62 Gegeven: Driehoek ABC met P op AB, Q op BC en R op AC,
cirkel c_1 door A, P en R, cirkel c_2 door B, P en Q, cirkel c_3 door C, Q en R. (zie de figuur hieronder)
Te bewijzen: c_1, c_2 en c_3 gaan door één punt.
Bewijs: S is het snijpunt van c_1 en c_2. Teken PS, QS en RS.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle S_3 = 180^\circ \text{ (}APSR\text{ is koordenvierhoek)}\\ \angle B + \angle S_2 = 180^\circ \text{ (}BQQS\text{ is koordenvierhoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle S_3 + \angle B + \angle S_2 = 360^\circ.$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B + \angle S_{23} = 360^\circ\\ \angle S_{123} = 360^\circ \text{ (volle hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle S_1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = \angle S_1\\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle S_1 + \angle C = 180^\circ.$$

Dus vierhoek $CQSR$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).
Dus S ligt op de cirkel door C, Q en $R \Rightarrow c_1$, c_2 en c_3 gaan door één punt.



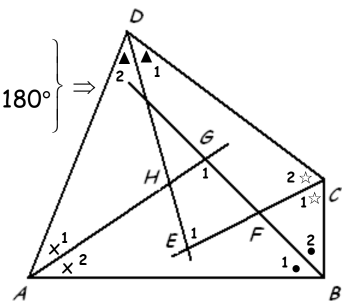
63 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de bissectrices die vierhoek $EFGH$ insluiten. (zie de figuur hieronder)
Te bewijzen: $EFGH$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_2 + \angle B_1 + \angle G_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\\ \angle D_1 + \angle C_2 + \angle E_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle G_1 = 180^\circ - \angle A_2 - \angle B_1\\ \angle E_1 = 180^\circ - \angle D_1 - \angle C_2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle G_1 + \angle E_1 = 180^\circ - \angle A_2 - \angle B_1 + 180^\circ - \angle D_1 - \angle C_2 = 360^\circ - \angle A_2 - \angle B_1 - \angle D_1 - \angle C_2\\ \left.\begin{array}{l}\angle A_{12} + \angle B_{12} + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)}\\ \angle A_1 = \angle A_2,\ \angle B_1 = \angle B_2,\ \angle C_1 = \angle C_2,\ \angle D_1 = \angle D_2\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_2 + \angle B_1 + \angle D_1 + \angle C_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\angle G_1 + \angle E_1 = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

Dus $EFGH$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).



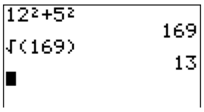
<u>**Diagnostische toets**</u>

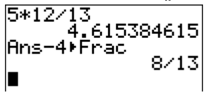
D1 $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle ADC=\angle ACB=90^\circ\\ \angle A=\angle A\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta ACB \text{ (hh)}\\ \left.\begin{array}{l}\angle BCA=\angle BDC=90^\circ\\ \angle B=\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ACB \backsim \Delta CDB \text{ (hh)}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta CDB.$

ΔADC	$AD=...$	$AC=5$	$DC=...$
ΔACB	$AC=5$	$AB=13$	$CB=12$
ΔCDB	$CD=...$	$CB=12$	$DB=...$

$AB^2=BC^2+AC^2 \Rightarrow AB^2=12^2+5^2=169 \Rightarrow AB=13.$

$CD=5\cdot 12:13=4\frac{8}{13}.$





D2a $\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle A\\ \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC} \text{ want } \frac{1\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AED \backsim \Delta ABC \text{ (zhz).}$

ΔAED	$AE=1\frac{1}{2}$	$AD=1$	$ED=...$
ΔABC	$AB=4\frac{1}{2}$	$AC=3$	$BC=...$

D2b $\Delta AED \backsim \Delta ABC$ (zie D2a) $\Rightarrow \angle AED=\angle ABC \Rightarrow DE \,//\, BC$ (F-hoeken).
$\left.\begin{array}{l}\angle EDF=\angle FBC \text{ (Z-hoeken)}\\ \angle DEF=\angle FCB \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta DEF \backsim \Delta BCF \text{ (hh).}$

ΔDEF	$DE=...$	$DF=...$	$EF=...$
ΔBCF	$BC=...$	$BF=...$	$CF=...$

D2c Uit $\Delta DEF \backsim \Delta BCF$ (zie D2b) volgt $\frac{DE}{BC}$ ($=\frac{1}{3}$ zie D2a) $=\frac{DF}{BF}=\frac{EF}{CF}\Rightarrow BF:DF=3:1.$

D3a $\left.\begin{array}{l}\angle C=\angle C\\ \angle CDE=\angle CAB=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEC \text{(hh).}$

ΔABC	$AB=7$	$AC=x+2\frac{1}{2}$	$BC=...$
ΔDEC	$DE=3$	$DC=x$	$EC=...$

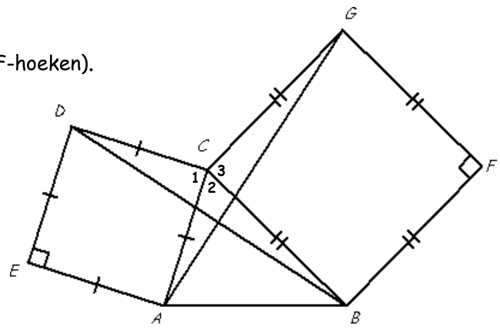
D3b $\frac{7}{3}=\frac{x+2\frac{1}{2}}{x}\Rightarrow 7x=3\cdot(x+2\frac{1}{2})\Rightarrow 7x=3x+7\frac{1}{2}\Rightarrow 4x=7\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{7\frac{1}{2}}{4}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}.$

D4 $\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle A\\ \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ADF \backsim \Delta ABC \text{ (zhz)} \Rightarrow \angle AFD=\angle C \text{ (***) en } DF \,//\, BC \text{ (F-hoeken).}$

$\left.\begin{array}{l}\angle B=\angle B\\ \frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta BDE \backsim \Delta BAC \text{ (zhz)} \Rightarrow \angle BED=\angle C \text{ en } DE \,//\, AC \text{ (F-hoeken).}$

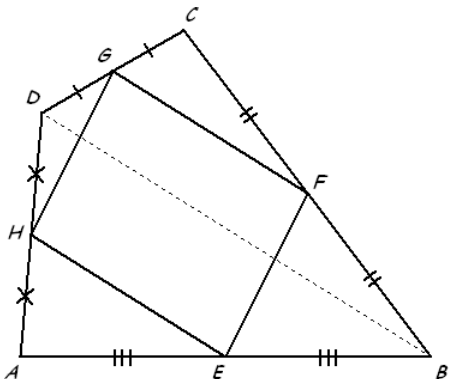
$\left.\begin{array}{l}\angle AFD=\angle C \text{ (zie ***)}\\ \angle AFD=\angle D_2 \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\}\Rightarrow \angle D_2=\angle C.$

D5 $\left.\begin{array}{l}\angle C_{12}=\angle C_{23}=90^\circ+\angle C_2\\ AC=DC \text{ (}EACD\text{ is een vierkant)}\\ CG=CB \text{ (}CBFG\text{ is een vierkant)}\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta ACG \backsim \Delta DCB \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AG=BD.$



D6 Gegeven: De vierhoeken $ABCD$ en $EFGH$. (zie de figuur hiernaast)
($AE=EB$, $BF=FC$, $CG=GD$ en $DH=HA$)
Te bewijzen: $EFGH$ is een parallellogram.
Bewijs: Teken BD.

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle A\\ AE=\frac{1}{2}AB\\ AH=\frac{1}{2}AD\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta AEH \backsim \Delta ABD \text{ (zhz)} \Rightarrow HE=\frac{1}{2}BD\\ \left.\begin{array}{l}\angle C=\angle C\\ CF=\frac{1}{2}CB\\ CG=\frac{1}{2}CD\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta CFG \backsim \Delta CBD \text{ (zhz)} \Rightarrow FG=\frac{1}{2}BD\end{array}\right\}\Rightarrow HE=FG.$

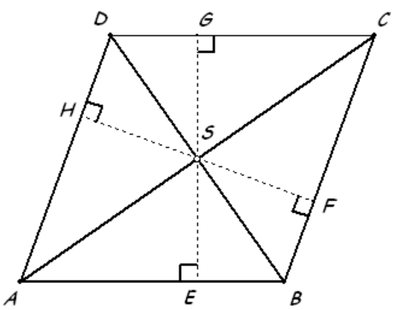


Teken daarna AC en bewijs op dezelfde manier dat $HG=EF$.
Van vierhoek $EFGH$ zijn twee paar overstaande zijden even lang, dus $EFGH$ is een parallellogram.

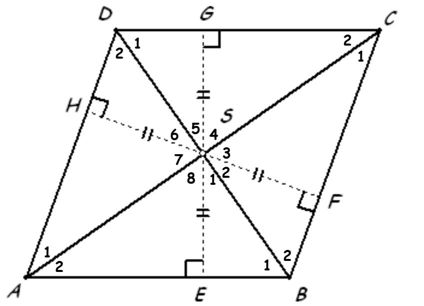
D7a Gegeven: Ruit $ABCD$ met snijpunt S van de diagonalen. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: S ligt even ver af van de vier zijden van ruit $ABCD$.
Bewijs: Teken de loodlijnen uit S op de zijden.

$\left.\begin{array}{l}SB=SB\\ \angle SBE=\angle SBF \text{ (diagonalen ruit)}\\ \angle SEB=\angle SFB=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta SBE \cong \Delta SBF \text{ (ZHH)} \Rightarrow SE=SF.$

Geheel analoog bewijs je dat $SF=SG$ en $SG=SH$.
Uit $SE=SF$, $SF=SG$ en $SG=SH$ volgt nu $SE=SF=SG=SH$.



D7b **Als van een vierhoek het snijpunt van de diagonalen even ver van de vier zijden ligt, dan is die vierhoek een ruit.**



Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $SE = SF = SG = SH$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: Vierhoek $ABCD$ is een ruit.
Bewijs:
$\left.\begin{array}{l} SE = SF \text{ (gegeven)} \\ BS = BS \\ \angle BES = \angle BFS = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BES \cong \Delta BFS \text{ (ZZR)} \Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2 \text{ en } \angle S_1 = \angle S_2.$
Analoog bewijs je dat $\angle S_3 = \angle S_4$, $\angle S_5 = \angle S_6$ en $\angle S_7 = \angle S_8$.
$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle S_1 + \angle S_2 + ... + \angle S_8 = 360^\circ \\ \angle S_1 = \angle S_2, \angle S_3 = \angle S_4\ \angle S_5 = \angle S_6 \text{ en } \angle S_7 = \angle S_8 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle S_{23} + \angle S_{67} = 180^\circ \\ \angle S_{23} = \angle S_{67} \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle S_{23} = \angle S_{67} = 90^\circ.$
Dus ook $\angle S_{18} = 90^\circ$.
$\left.\begin{array}{l} BS = BS \\ \angle S_{23} = \angle S_{18} = 90^\circ \\ \angle B_1 = \angle B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \cong \Delta CBS \text{ (HZH)} \Rightarrow AB = BC.$
Analoog bewijs je dat $BC = CD$ en $CD = DA \Rightarrow AB = BC = CD = DA \Rightarrow ABCD$ is een ruit.

D8a Gegeven: Driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ en hoogtelijn CD. (zie figuur 8.48)
Te bewijzen: $AC^2 = AD \cdot AB$ en $BC^2 = BD \cdot AB$.
Bewijs:
$\left.\begin{array}{l} \angle ADC = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle A = \angle A \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta ACB \text{ (hh)} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB$ (zie de tabel).
$\left.\begin{array}{l} \angle BCA = \angle BDC = 90^\circ \\ \angle B = \angle B \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACB \backsim \Delta CDB \text{ (hh)} \Rightarrow BC^2 = BD \cdot AB$ (zie de tabel).

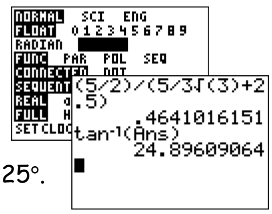
ΔADC	AD	AC	DC
ΔACB	AC	AB	CB

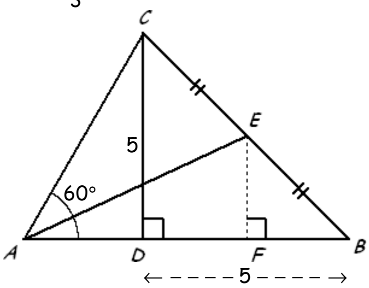
ΔACB	AC	AB	CB
ΔCDB	CD	CB	DB

D8b Gegeven: Driehoek ABC met $\angle C = 90^\circ$ en hoogtelijn CD. (zie figuur 8.48)
Te bewijzen: $AC^2 + BC^2 = AB^2$.
Bewijs: $AC^2 = AD \cdot AB$ (stelling van Euclides) en $BC^2 = BD \cdot AB$ (stelling van Euclides).
Dus $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + DB) \cdot AB = AB \cdot AB = AB^2$.

D9a ΔADC (zie figuur 8.49): $AD = \frac{CD}{\sqrt{3}} \Rightarrow AD = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 1\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Dus $AB = AD + DB = 1\frac{2}{3}\sqrt{3} + 5$.

D9b Teken $EF \perp AB$. (zie de figuur hiernaast)
ΔBDC is een vergroting van ΔBFE met factor 2.
Dus $BF = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$.
$AF = AD + DF = 1\frac{2}{3}\sqrt{3} + (5 - 2\frac{1}{2}) = 1\frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\frac{1}{2}$.
ΔAFE: $\tan \angle FAE = \frac{FE}{AF} = \frac{2\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\frac{1}{2}} \Rightarrow \angle FAE = \angle BAE \approx 25^\circ$.

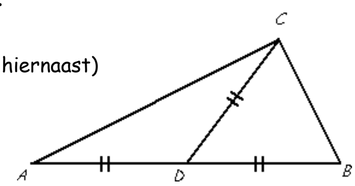




D10 Vermoeden: $\angle CPQ + \angle CQP = \angle A$.

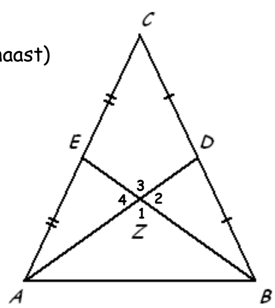
D11 Vermoeden: $CE = DF$.

D12 Gegeven: Driehoek ABC, waarbij zwaartelijn CD de helft is van AB. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $\angle ACB = 90^\circ$.
Bewijs: $\left.\begin{array}{l} D \text{ is het midden van } AB \\ CD = \frac{1}{2}AB \end{array}\right\} \Rightarrow AD = BD = CD.$
AB is middellijn van de cirkel die door C gaat $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$ (omgekeerde stelling van Thales).



D13 Gegeven: Driehoek ABC met de zwaartelijnen AD en BE zo, dat $AD = BE$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: Driehoek ABC is gelijkbenig.
Bewijs:
$\left.\begin{array}{l} AZ = \frac{2}{3}AD \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ BZ = \frac{2}{3}BE \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ DZ = \frac{1}{3}AD \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ EZ = \frac{1}{3}BE \text{ (zwaartelijnstelling)} \\ AD = BD \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AZ = BZ \text{ en } EZ = DZ \\ \angle Z_2 = \angle Z_4 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AZE \cong \Delta BZD \text{ (ZHZ).}$

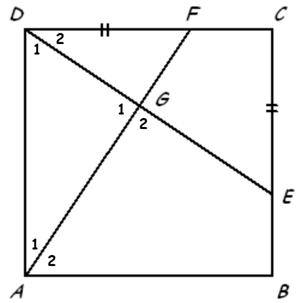
$\left.\begin{array}{l} AE = BD \\ AE = \frac{1}{2}AC \\ BD = \frac{1}{2}BC \end{array}\right\} \Rightarrow AC = BC \Rightarrow \Delta ABC$ is gelijkbenig.



D14 Gegeven: Koordenvierhoek $ABCD$ met de lijnen AB en CD die elkaar snijden in P en de lijnen AD en BC die elkaar snijden in Q. (gebruik figuur 8.50)
Te bewijzen: $\angle CPQ + \angle CQP = \angle A$.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle BCD = 180^\circ \text{ (koordenvierhoekstelling)}\\ \angle BCD = \angle PCQ \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle PCQ = 180^\circ \\ \angle CPQ + \angle CQP + \angle PCQ = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle CPQ + \angle CQP = \angle A.$$

D15 Gegeven: Vierkant $ABCD$ met E op BC en F op CD zo, dat $CE = DF$.
Het snijpunt van AF en DE is G. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $ABEG$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:



$$\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle D_{12} = 90^\circ\\ CE = DF \text{ (gegeven)}\\ DC = AD \text{ (vierkant)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CED \cong \Delta DFA \text{ (ZHZ)} \Rightarrow \angle D_2 = \angle A_1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle D_1 + \angle D_2 = 90^\circ\\ \angle D_2 = \angle A_1\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 + \angle A_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle G_1 = 90^\circ \text{ (de hoeken in } \Delta AGD \text{ zijn samen } 180^\circ).$$

$\angle G_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle G_2 = 180^\circ - \angle G_1$ (gestrekte hoek) $= 90^\circ$.
Dus $\angle B + \angle G_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow ABEG$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).

Gemengde opgaven 8. Vermoedens en bewijzen

ΔACD	$AC = ...$	$AD = ...$	$CD = ...$
ΔBCE	$BC = ...$	$BE = ...$	$CE = ...$

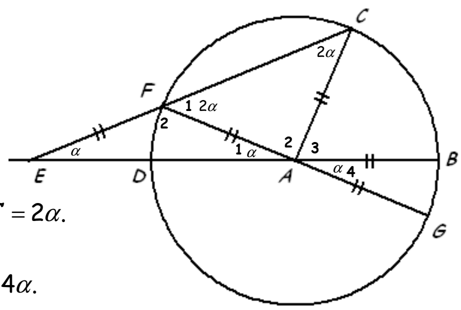
G40a $\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle C\\ \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACD \backsim \Delta BCE$ (hh) $\Rightarrow AC \cdot CE = BC \cdot CD$.

ΔAEF	$AE = ...$	$AF = ...$	$EF = ...$
ΔBDF	$BD = ...$	$BF = ...$	$DF = ...$

G40b $\left.\begin{array}{l}\angle AFE = \angle BFD \text{ (overstaande hoeken)}\\ \angle AEF = \angle BDF = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta BDF$ (hh) $\Rightarrow AF \cdot DF = BF \cdot EF$.

G41a *

G41b Stel $\angle E = \alpha$. (zie de figuur hiernaast)



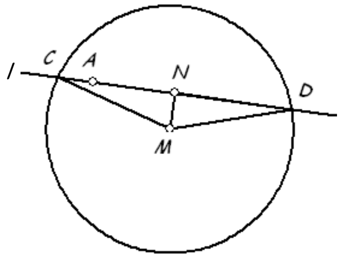
$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle E = \angle A_1 \ (EF = AF)\\ \angle E = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \alpha\\ \angle A_1 = \angle A_4 \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_4 = \alpha.$

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle E + \angle A_1 + \angle F_2 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\\ \angle F_{12} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_1 = \angle E + \angle A_1 = 2\alpha\\ \angle F_1 = \angle C \ (AF = AC)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C = 2\alpha.$

$\left.\begin{array}{l}\angle C + \angle A_2 + \angle F_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\\ \angle A_{234} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle CAG = \angle A_{34} = \angle C + \angle F_1 = 4\alpha.$

G41c $\angle A_{34} = 4\alpha$ (zie G41b) én $\angle A_4 = \alpha$ (zie G41b) $\Rightarrow \angle A_3 = 3\alpha$. Dus $\angle E = \frac{1}{3}\angle BAC$.

G42a Vermoeden: De baan van N is een cirkel met middellijn AM.



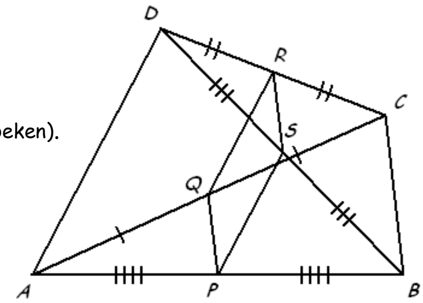
G42b Gegeven: Cirkel met middelpunt M en een punt A binnen de cirkel.
De lijn l door A snijdt de cirkel in C en D. Het midden van CD is N.
Te bewijzen: N ligt op de cirkel met middellijn AM.
Bewijs:

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}NC = ND\\ MN = MN\\ MC = MD\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MCN \cong \Delta MDN \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle MNC = \angle MND\\ \angle MNC + \angle MND = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle MNC = \angle MND = 90^\circ.$

$\angle MNA = \angle MNC = 90^\circ$ (M en A liggen vast) $\Rightarrow N$ op de cirkel met middellijn AM (Thales).

G43a Vermoeden: $PQRS$ is een paralllelogram.

G43b Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met de diagonalen AC en BD.
P is het midden van AB, Q het midden van AC, R het midden van CD en S het midden van BD.
P, Q, R en S liggen niet op één lijn. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $PQRS$ is een parallellogram.
Bewijs:



$\left.\begin{array}{l}\angle QCR = \angle ACD\\ \frac{CQ}{CA} = \frac{CR}{CD} = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta CRQ \backsim \Delta CAD \text{ (zhz)} \Rightarrow \angle CRQ = \angle CAD \Rightarrow QR \parallel AD$ (F-hoeken).

Analoog bewijs je dat $PS \parallel AD$, $RS \parallel BC$ en $QP \parallel BC$.

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}QR \parallel AD\\ PS \parallel AD\end{array}\right\} \Rightarrow QR \parallel PS\\ \left.\begin{array}{l}RS \parallel BC\\ QP \parallel BC\end{array}\right\} \Rightarrow RS \parallel QP\end{array}\right\} \Rightarrow PQRS$ is een parallellogram.

ΔEDC	$ED = ...$	$EC = ...$	$DC = 4$
ΔEBF	$EB = ...$	$EF = ...$	$BF = ...$

ΔEDC	$ED = 7\frac{1}{2}$	$EC = 8\frac{1}{2}$	$DC = 4$
ΔEBF	$EB = 8\frac{1}{2}$	$EF = ...$	$BF = ...$

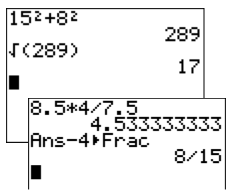
G44 $\left.\begin{array}{l}\angle DEC = \angle BEF \text{ (overstaande hoeken)}\\ \angle EDC = \angle EBF = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EDC \backsim \Delta EBF$ (hh).

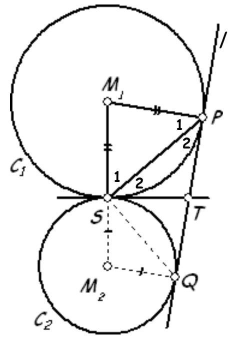
$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 15^2 + 8^2 = 289 \Rightarrow BC = 17$.

ΔABC is een vergroting van ΔDEC met factor 2.

Dus $DE = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7\frac{1}{2}$ en $CE = EB = \frac{1}{2} \cdot 17 = 8\frac{1}{2}$.

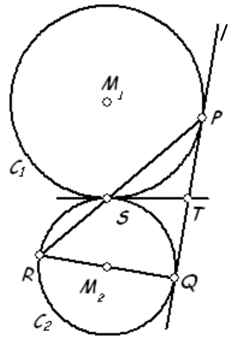
$BF = 8\frac{1}{2} \cdot 4 : 7\frac{1}{2} = 4\frac{8}{15}$.





G45a Gegeven: Gegeven de cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 die elkaar raken in S.
l raakt c_1 in P en c_2 en Q. De gemeenschappelijke raaklijn in S snijdt PQ in T.
Te bewijzen: P,Q en S liggen op één cirkel met middelpunt T.
Bewijs: Teken eerst PS, M_1P en M_2S. (zie de figuur hiernaast)

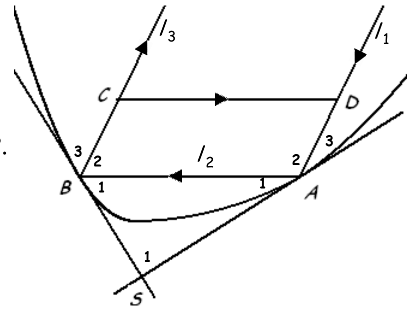
$\left.\begin{array}{l}\angle P_{12} = \angle S_{12} = 90^\circ \text{ (raaklijn)}\\ \angle P_1 = \angle S_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_2 = \angle S_2 \Rightarrow TP = TS$ (gelijkbenige driehoek).



Op soortgelijke manier als je bewijst dat $TP = TS$ bewijs je ook dat $TS = TQ$.
Dus $TP = TS = TQ \Rightarrow P, Q$ en S liggen op de cirkel met middelpunt T.

G45b Gegeven: Zie G45a. (gebruik de figuur van G45a)
Te bewijzen: $STPM_1$ is een koordenvierhoek.
Bewijs: $\angle P_{12} = \angle S_{12} = 90°$ (raaklijn) $\Rightarrow \angle P_{12} + \angle S_{12} = 180°$.
Dus $STPM_1$ is een koordenvierhoek (omgekeerde koordenvierhoekstelling).

G45c Gegeven: Zie G45a en verder is QR een middellijn van c_2. (gebruik de figuur hiernaast)
Te bewijzen: P, S en R liggen op één lijn.
Bewijs: Uit G45a volgt dat S op de cirkel met middellijn PQ.
$$\left.\begin{array}{l}\text{Dus } \angle PSQ = 90° \text{ (omgekeerde stelling van Thales)}\\ QR \text{ is middellijn} \Rightarrow \angle RSQ = 90° \text{ (omgekeerde stelling van Thales)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle PSR = 180°.$$
Dus P, S en R liggen op één lijn.



G46 Gegeven: $l_1 \,//\, l_3$, $\angle A_1 = \angle A_3$ en $\angle B_1 = \angle B_3$. (zie de figuur hiernaast)
Te bewijzen: $\angle S_1 = 90°$
Bewijs: Teken $CD \,//\, AB \Rightarrow ABCD$ is een parallellogram.
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_2 + \angle B_2 = 180° \text{ (zonder bewijs te gebruiken)}\\ \angle A_{123} + \angle B_{123} = 360° \text{ (twee gestrekte hoeken)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle A_3 + \angle B_1 + \angle B_3 = 180°.$$
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 + \angle A_3 + \angle B_1 + \angle B_3 = 180°\\ \angle A_1 = \angle A_3 \text{ en } \angle B_1 = \angle B_3\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle B_1 = 90°.$$
$\angle S_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1 = 180° - 90° = 90°$ (hoekensom driehoek).

G47a De middelpunten liggen op lijn AB, want de cirkels raken c in A.
De middelpunten liggen ook op de bissectrices van k en $l \Rightarrow$ construeer de bissectrices van k en l.
(de cirkels raken k en $l \Rightarrow$ de middelpunten van de cirkels hebben gelijke afstanden tot k en l)
De middelpunten zijn de snijpunten van deze bissectrices met de lijn door A en B.

G47b Gebruik figuur G.31: $\angle BDA = 90°$ (omgekeerde stelling van Thales) $\Rightarrow \angle PDA = 90°$ (gestrekte hoek).
$\angle A_{12} = 90°$ (raaklijn).
$\angle M_2 = 180° - \angle M_1 = 180° - x$ (gestrekte hoek).
$\angle A_2 = 180° - \angle PDA - \angle APD = 180° - 90° - x = 90° - x$ (hoekensom driehoek).
$\angle A_1 = 90° - \angle A_2 = 90° - (90° - x) = x$ (rechte hoek).
$\angle S_1 = 180° - \angle A_1 - \angle M_1 = 180° - x - x = 180° - 2x$ (hoekensom driehoek).
$\angle S_2 = 180° - \angle S_1 = 180° - (180° - 2x) = 2x$ (gestrekte hoek).
$\angle P_1 = 180° - \angle A_{12} - \angle M_1 = 180° - 90° - x = 90° - x$ (hoekensom driehoek).
$\angle B = 180° - \angle A_{12} - \angle BPA = 180° - 90° - x = 90° - x$ (hoekensom driehoek).

G47c Gegeven: Zie figuur G.31.
Te bewijzen: $AS = PS = MS$.
Bewijs:
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle M_1 \text{ (zie G47b)} \Rightarrow \Delta AMS \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AS = MS\\ \left.\begin{array}{l}\angle P_1 = 90° - \angle M_1 \text{ (zie G47b)}\\ \angle A_2 = 90° - \angle M_1 \text{ (zie G47b)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta APS \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AS = PS\end{array}\right\} \Rightarrow AS = PS = MS.$$

G48 $PCQS$ is een koordenvierhoek $\Rightarrow \angle PSQ + \angle PCQ = 180° \Rightarrow \angle PSQ = 180° - \angle PCQ = 180° - 90° = 90°$.
$PSAB$ is een koordenvierhoek $\Rightarrow \angle PSA + \angle ABP = 180° \Rightarrow \angle PSA = 180° - \angle ABP = 180° - 90° = 90°$.
$\angle ASQ = \angle PSQ + \angle PSA = 90° + 90° = 180° \Rightarrow S$ ligt op AQ.

G49a Vermoeden: De omgeschreven cirkel van ΔABD gaat door de raakpunten van c_1 en c_3 en c_2 en c_3.

G49b Gegeven: Zie figuur G.34.
Te bewijzen: $ABDE$ is een koordenvierhoek.
Bewijs: Teken de lijnstukken AE en BD.
$$\left.\begin{array}{l}M_1A = M_1E \Rightarrow \Delta M_1AE \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow \angle M_1AE = \angle M_1EA = \tfrac{1}{2}(180° - \angle M_1)\\ M_1B = M_1D = (\text{straal } c_1) + d \Rightarrow \Delta M_1BD \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow \angle M_1BD = \angle M_1DB = \tfrac{1}{2}(180° - \angle M_1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$\angle M_1AE = \angle M_1EA = \angle M_1BD = \angle M_1DB$.
$\angle M_1EA + \angle AED = 180° \Rightarrow \angle M_1BD + \angle AED = 180° \Rightarrow ABDE$ is een koordenvierhoek.

G49c $ABDE$ is een koordenvierhoek (bewezen in G49b) $\Rightarrow E$ op de cirkel door A, B en D.
$ABCD$ is een koordenvierhoek (bewijs zoals bij G49b) $\Rightarrow C$ op de cirkel door A, B en D.
Dus A, B, C, D en E liggen op één cirkel (de omgeschreven cirkel van ΔABD).